# CORSO

DI

# GEOMETRIA

## ELEMENTARE, E SUBLIME

VOLUME III.

LE SEZIONI CONICHE

# TRATTATO GEOMETRICO

DELLE

# SEZIONI CONICHE

DI

## NICOLA FERGOLA

*più volte riprodotto con modificazioni, ed aggiunte*

DA

## V. FLAUTI

Ed in questa decima edizione arricchito di nuove importanti proprietà di quelle curve, e d' intere teoriche atte a promovere l' invenzione geometrica, e l' intelligenza delle ricerche de' moderni intorno alle medesime

*Ille in Geometria se profecisse sciat, cui Euclides, Archimedes, Apollonius valde placebunt.*

IN NAPOLI
*Nella stamperia privata dell' autore*
*1844.*

# VINCENZO FLAUTI

AL SUO VETERANO AMICO, E COLLEGA

## FELICE GIANNATTASIO

salute.

*Tu fosti, o mio ottimo amico, il primo a promovere la pubblicazione del trattato geometrico delle* Sezioni coniche, *del fu nostro comune maestro Nicola Fergola, che, a malgrado lui, nel* 1791 *uscì alla luce, come prima parte del corso di* Geometria sublime, *da quel sommo uomo elaborato ad uso di sua scuola, ed in aumento della Geometria; di cui la seconda parte, che doveva comprendere l'*Arte Euristica degli antichi, e de'moderni geometri, *rimase inedita, per le infelici circostanze de' tempi sopravvenuti; ed intorno alla quale sto ora lavorando, a fin di compierla, e pubblicarla; e già la parte I. n'è uscita alla luce, sono ormai due anni, senza che, e men duole assai, avessi potuto porre ancor mano alla stampa della parte II, distratto da tante strane occupazioni, e dedito ancora al presente lavoro, che maggior cura ha richiesto di quello che parevami esigesse nell' intraprenderne la ristampa. Posto ciò parmi ben dovere, che io a te lo indirizzi ora, che per gli aumenti presi dalla Geometria, nel periodo non breve di un mezzo secolo, ricomparisce, per la decima volta, con dimostrazioni assai più semplici, ed uniformi delle*

*proprietà già conosciute di quelle curve, ed arricchito di molte altre nuove ed importanti per altre ricerche geometriche, e per le applicazioni alla naturale Filosofia. E vi ravviserai ancora intere teoriche di nuovo conio, delle quali ti sarà assai grato l'intendere, che taluna avendo prese le mosse in nostra scuola, e da essa trasmigrata oltremonti, vi sia ritornata, per ricevervi il compimento che l' era essenziale, da poter costituire una parte di quelle dottrine, che al presente conviene alla gioventù matematica intorno a'* Conici *apprendere. E dovrà certamente commuovere il tuo animo ben fatto, nella grave età alla quale la Provvidenza ti ha fatto giugnere, conservandoti integre sì le forze del corpo, come dell'anima, che a questo sì sensibile aumento delle dottrine de'* Conici, *da aver reso un tal lavoro presso che interamente nuovo, abbia data grandissima occasione quel* programma *di tre quistioni geometriche, da me proposto fin dal* 1839, *in aumento e comparazione de' metodi d' inventare, al quale sì ben soddisfece, per due di esse, il valoroso geometra di nostra scuola Nicola Trudi; e qualche nuovo principio fondamentale, da illustrare la natura de' problemi, è venuto fuori pel quesito terzo, del quale non mancheranno i geometri di occuparsi. Ma oltrepassando il Trudi i limiti segnati nella proposta del programma, dando luogo a nuove ricerche su certi problemi d' iscrizioni posizionali di poligoni nelle curve coniche, che col primo argomento del*

*programma erano correlativi, dalle sue escogitazioni sono a mano a mano derivate tutte quelle importanti dottrine, che, ridotte in convenevol forma, compiono il presente trattato, offrendo a' geometri un più largo campo da speculare, e mezzi da poter con più sicurezza riescire nelle loro ricerche.*

*Tu ben conosci di quanti dispiaceri mi sia stata cagione questa mia intrapresa a solo bene della scienza, ed a decoro del nostro paese, e de' nostri compatriotti, per la utilità de' quali mi sono tanto adoperato, e sempre, nella mia lunga carriera, quando mi era concesso più che ora di esser loro utile; da talun de' quali mi sono veduto con tanta poca amorevolezza corrisposto, da farmi sovente ripetere il memorabile detto del Newton all' Oldemburgio, che:* umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem. *Ma pure, poichè alla Divina Provvidenza è piaciuto, per sì strana e dolorosa via condurmi ad esser di qualche utilità a' geometri, ed alla gioventù, che batte l'ardua ed estesissima carriera delle Matematiche, io ne sono ben contento; e non solo perdono coloro, che con tanta inurbanità mi hanno, per fini vilissimi, trattato, nè meno avendo riguardo alle mie ottime intenzioni, ed a' miei lunghi servigi, ma me ne dichiaro ad essi obbligato e riconoscente: perchè senza di ciò, nè alle gravi fatiche, che ora sostengo, stanco da lunga carriera, mi sarei rivolto, nè la nostra scuola, e 'l nostro paese or godrebbe il van-*

*taggio di veder pubblicati tanti utilissimi lavori, che a quella si appartengono, che ne hanno formata l' istituzione, e 'l decoro per lunga serie di anni, e che per la confusione de' MSS. del Fergola, e l' imperfezione grandissima in cui lasciolli questo virtuosissimo uomo, per la lunga, e ferale malattia, che il tenne per tanto tempo privo di mente, sarebbero rimasti assolutamente perduti, e per sempre. Nè tampoco mi si sarebbe offerto un mezzo, mio antico amico, di attestare a te vivente, e per tanti miei illustri colleghi trapassati, i sentimenti del mio animo verso di loro, che ho sempre amati in vita, e che mi sforzo di onorare ora, che ne godono una migliore, nella quale dovrò io ben presto raggiugnerli.*

# STORIA

DELLE

# SEZIONI CONICHE *

1. Chiunque vaspeculando i progressi della Geometria de' curvilinei, ed i varii rami, che leggiadramente crebberle d' intorno, resterà sorpreso nell'osservare, come i geometri dell' antichità rimota, e sin dalla culla della Geometria, avessero adeguatamente conosciute le curve coniche; quasi che la scienza de' *Conici* fosse nata sì perfetta, qual n' è tra noi. Ed in vero essi compreser chiaramente la più semplice, e la più elegante genesi, che conviensi alle dette curve, ne dimostrarono con venustà e rigore le moltiplici proprietà, che le adornano; ed in fin prescrissero i varii usi di queste curve nell'inventare, e massimamente nel costruire i *problemi solidi*, che diciamo *di terzo grado*, o *di quarto* [a]. Ei cre-

---

* *Si avverte che le note con numeri appartengonsi all'* autore, *quelle indicate da lettere all'* editore.

(a) È ben naturale che gli antichissimi geometri i quali elementarmente considerarono il cilindro, il cono, e la sfera, come generati dalla rivoluzione del rettangolo, del triangolo rettangolo, e del semicerchio, e che ben rilevavano dalla loro genesi dover la sezione fatta in essi perpendicolarmente all' asse di rotazione essere un cerchio, il che nella sfera aveva ancor luogo per ogni altra, si fossero rivolti a voler conoscere quelle che ottenevansi segando poi obbliquamente all' asse il cilindro, e 'l cono; e fa anzi maraviglia come avessero durato tanto tempo, e fino a Sereno di Antista, a riconoscere l' i-

derà, che cotesto privilegio di conoscenza si fosse accordato alla rara sapienza degli Aristei, degli Euclidi, degli Archimedi, e degli Apollonii, i quali furono i primi padri del retto geometrizzare; o di ciò non pago potrà credere, che lo avesser meritato coteste linee di second' ordine, che sono le curve della Natura. Imperocchè le parabole sono i sentieri de' corpi, che dalla terra projettansi obbliquamente; e simili ad esse sono le orbite delle comete, che da' rimoti spazi del firmamento alle regioni solari fan ritorno. I pianeti tanto primari, che secondari si volgono in ellittiche trajettorie. E finalmente i gnomoni fitti a squadra su piani orizzontali, o in su le pareti van descrivendo cogli estremi delle loro ombre or l'una, or l'altra di quelle curve, che dal segamento del cono con un piano ricaviamo. Ma conviensi agli eruditi l'indagare di quel mirabil fenomeno la cagione, ed io quì deggio a prò de' giovanetti intrattenermi a compiere un ragionato discorso dell' argomento.

2. Aristeo Seniore [1], vetustissimo geometra cro-

—

dentica natura dell' ellisse conica, e cilindrica. Ma che si fossero fin da questi primi tempi tanto internati nella conoscenza delle proprietà di tali curve, è un' opinione del Fergola fondata sul ragionamento ch' egli fa su di Aristeo seniore nella seguente nota, intorno alla quale dichiareremo tra poco i nostri dubbi.

[1] Aristeo Seniore non fu filosofo Platonico, come opina il Montucla nell' *Hist. des Math. part. I. lib. III. n. 19*, e con ciò posteriore al divino Platone. Nè tampoco Eudosso Gnidio fu al medesimo Aristeo anteriore, come scrive Giorgio Krafft, *nell'ordine cronologica de' Matem. ant.* Cotesto geometra crotoniate fu lo più distinto discepolo di Pitagora, e il primo di lui successore nella scuola *Italica*. Archita Tarentino, che fu l' ottavo successore di Pitagora, e quindi posteriore ad Aristeo al-

toniate, e successore del gran Pitagora nella scuola Italica, fin dall'infanzia della Geometria elementare congegnò brevi e nitide istituzioni su i *Coni-*

—

meno per un secolo, ebbe per discepoli nella Geometria Platone ed Eudosso; de' quali il primo ritrovò l'orditura dell' analisi geometrica, e l'altro compose il libro V. degli *Elementi*; ove l' arte contiensi del dimostraro. E tornerà a gloria della Magna Grecia, lo cui regioni formano una parte di questo regno di Napoli, che di là sieno venuti i primi semi della Geometria sublime, o dell' arte d' inventare, o di dimostrare (*Jambl. de vita Pyth. c. ult. — Stanlei de Pyth. c.24.— Bruker. de Pyth.*).

(*b*) Da questa opinione ch'ebbe il Fergola circa l'epoca in cui visse Aristeo detto *seniore* fu egli indotto conseguentemente a supporre, che la teorica de' conici fosse stata assai conosciuta fin da' primi tempi della Geometria, che io seguendolo ritenni, non solamente nelle precedenti edizioni di questo trattato de' *Conici*, ma ancora nella dissertazione sul problema *della trisezione angolare*, che dopo averla letta alla R. A. delle Scienze di Napoli, in occasione di diverse preteso soluzioni di esso a quella inviate ad esame, fu pubblicata nella *Biblioteca analitica* nel 1811. Ma ora, meglio e più ponderatamente considerando la cosa, sembrami assai più fondata l' opinione contraria in credere Aristeo un filosofo Platonico. Ed eccone in brevo le ragioni, le quali si vedranno ancora sviluppate nel recar la storia del problema della *trisezione dell' angolo*, innanzi alla Parte II. del trattato dell' *Invenzione geometrica*.

L' opinione del Fergola non è fondata che sull' autorità di Giamblico, scrittore dell' IV° secolo, il quale pose Aristeo tra' successori di Pitagora nella scuola Jonica, e per sette età, cioè circa 200 anni anteriore a Platone. Intanto Eratosteoe Cireneo, nell' epigramma che aggiunse alla sua lettera al re Tolomeo, attribuisce assolutamente a Menecmo l' invenzione delle Sezioni Coniche, che almeno bisogna però credere essere stato il primo a considerarle attentamente, ed a prevalersene in costruire i problemi *solidi*, applicandole a quello della *duplicazione del cubo*. Ma ponendo da banda l' autorità storica, e stando a quella della più rigorosa critica geometrica, se ben 200 anni prima di Platone si ebbe una compiuta dottrina de' *Conici*, e de' *Luoghi Solidi*, che suppone la conoscenza dell' uso di quelle curve nella risoluzione di tali problemi; perchè mai non apparve con esse risoluto il problema

*ci*, dividendole in cinque libri [a]. Ei ve ne aggiunse altrettanti su i *Luoghi Solidi*. E quest'opera destinata, com' io m' immagino, a comporre i proble-

—

della *trisezione dell' angolo*? e perchè quello della *duplicazione del cubo*, che tanto agitossi nella scuola di Platone e tra' geometri suoi contemporanei non ebbe altra soluzione per mezzo delle curve coniche, che quella di Menecmo? mentre tanti sforzi ingegnosissimi si fecero, da Platone, da Archita stesso, da Eudosso, ed ancor da altri per risolverlo meccanicamente.

Al certo, come ho detto, ed ognun comprende, la conoscenza de'*luoghi solidi* suppone stabilito il loro uso, e quindi la soluzione de' problemi *solidi* per mezzo di essi, tra' quali erano principalissimi i due sopraddetti. E da queste considerazioni or mi sembra ben ragionevole l' opinione del Montucla, intorno ad Aristeo seniore, che cotesto geometra avesse dovuto precedere di poco, o esser anche contemporaneo di Euclide; e che raccogliendo egli le dottrine su' Conici stabilitevi da Menecmo, che fu discepolo di Eudosso Gnidio, e conobbe ancora Platone, ne avesse composti que' cinque chiari libri sullo medesimo, che poi fece seguire da altrettanti su' *Luoghi Solidi*. V' è ancora a riflettere, che sembra inconcepibile, che da Aristeo, considerato come successore di Pitagora, fino ad Euclide, per lo spazio di ben 300 anni altro trattato non si fosse composto su questo argomento. Ed a ciò si arroge ancora, per chi ben conosce di quanta importanza sia la teorica delle proporzioni nello svolger le proprietà delle sezioni coniche, che non può comprendersi come senza di quella, che tutti convengono essere stata stabilita da Eudosso contemporaneo di Platone, si fosse potuto sì addentro penetrare nelle proprietà di quelle curve, da avervi Aristeo stabiliti due ampii trattati, cui poco rimase ad aggiungnere fino ad Apollonio. Adunque conviene conchiudere, che la Geometria vada debitrice, come di tanto altre cose, alla scuola di Platone, per una compiuta conoscenza delle *Sezioni Coniche*, e dei loro uso nella risoluzione de' problemi. E con tener presenti cotesti principii si potrà convenevolmente giudicare di ciò che dall' autore si dice in tale argomento nel §. 11.

[a] Vedi Pappo Alessandrino nella *pref. al lib.* VII. *delle Coll. Math.*, e Viviani nella prefazione alla sua divinazione geometrica su i *Luoghi Solidi* di Aristeo seniore.

mi di *terzo*, e di *quarto grado* [3], dovea costituire una parte essenziale di quel corso analitico, che appellavasi dagli antichi *Luogo Risoluto* [4]. Dopo di

[3] I problemi di 3°, e 4° *grado* si dicevano dagli antichi problemi *Solidi* (*Si vegga di ciò la ragione nella I<sup>a</sup>. dissertazione inserita nel vol. I. degli Opuscoli*).

[4] I geometri, che travagliarono sul *Luogo Risoluto*, e che gittarono le fondamenta della Geometria sublime, furono Aristeo seniore, Euclide, Eratostene, ed Apollonio Pergeo. Onde qualora volevasi istituire un giovanetto nell' arte dell' inventare, o del dimostrare, dopo di avergli distintamente recata la Geometria elementare, gli si facevano studiare i libri che appartenevano al *Luogo Risoluto*, de' quali eccone l' ordine, e gli argomenti serbatici da Pappo nella citata prefazione, e la reintegrazione di alcuni di essi fatta da' modermi geometri.

OPERE ANALITICHE DEGLI ANTICHI.

| | |
|---|---|
| *Euclidis Data*. lib. I.<br>*Apollonii de Sectione rationis*, lib. II. | Esistenti. |
| | Restituiti. |
| *Apollonii de Sectioni Spatii*. lib. II. | da *Halley*.<br>e dallo *Snellio*. |
| *Apollonii determinatae Scotionis*. lib. II. | dallo stesso *Snellio*, da *Giannino*, e da *Roberto Simson*. |
| *Apollonii Tactionem*. lib. II. | da *Francesco Vieta*, e dal *Fergola*. |
| *Euclidis Porismata*. lib. III. | da *Pietro Fermat*, e dal *Simson*. |
| *Apollonii Inclinationem*. lib. II. | da *Marino Ghetaldo*, e da *Horsley*. |
| *Apollonii Locorum Planorum*, lib. II. | dal *Fermat*, da *Francesco Schooten*, e da *Roberto Simson*. |
| *Apollonii Conicorum*. lib. VIII. | VII. esistenti; ma il V. fu anche restituito da *Viviani*; e l' VIII. lo è stato da *Halley*. |
| *Aristaei Loca Solida*. lib. V. | da *Vincenzo Viviani* |
| *Euclidis Locorum ad superficiem*. lib. II. | . . . . . . . . . . . |
| *Eratosthenis de medietatibus*. lib. II. | . . . . . . . . . . . |

Aristeo il divino Platone, Eudosso Gnidio, e'l suo discepolo Menecmo, e forse tanti altri geometri , le opere de'quali perirono in un co'loro nomi,scoversero altre verità sul medesimo soggetto.E queste cose dovettero essere quel materiale , onde Euclide [5] compose i quattro libri delle sezioni coniche,e che forse lo stesso principe de' geometri Archimede Siracusano anche ne' *Conici*, cui talora ne' suoi libri *delle feroidi*, e *delle conoidi* ei si rapporta. Ma coteste opere il tempo edace le involò tutte alla posterità erudita. E niuna delle verità, che vi si contenevano, sarebbe passata ad illustrar nostra ragione , se per buona fortuna non fossero a noi pervenuti i *Conici* di Apollonio Pergeo , ove con bell'ordine veggonsi quelle riunite,e col rigor della Sintesi dimostrate.

3. Questo valentuomo nato in Perga città della Panfilia 247 anni prima dell'Era volgare (come riferiva *Eraclio* o *Eraclide* nella vita di Archimede , che fino a noi non pervenne ) fu istituito da' discepoli di Euclide in Alessandria , e divenne un geometra quanto esteso nelle matematiche conoscenze , altrettanto ferace d' invenzioni . Ei fra le molte opere , che compose, scrisse VIII. libri su i *Conici*; ordinando ne' primi quattro , illustrando , ed universalizzando ciò che gli avean trasmesso su tali curve i geometri anteriori ; ed aggiungendovi

---

[5] Vedi Pappo nel giudizio , ch' ei reca su i *Conici* di Apollonio nella citata pref.

verità più sublimi negli ultimi quattro libri. Se i primi quattro di questi libri sieno stati quegli stessi, che avea composti Euclide sul medesimo soggetto; o se Apollonio, ch' era molto cupido di gloria, avendo involato alcuni privati manoscritti ad Archimede, gli avesse pubblicati in suo nome [6] non cale quì esaminare (e). Farà non per tanto alta maraviglia ai matematici l' osservare, come l' ho detto fin da principio, che da' primi tempi della Geometria siensi distintamente comprese le *linee di second' ordine*, che non ha guari si è conosciuto esser curve della Natura.

4. Ma prima, ch' io vi ragioni dell' ordine, che si ravvisa ne' *Conici* di Apollonio, del fato di que-

[6] Gli scrittori, cho hanno ad Apollonio imputato questo plagio letterario, si furono tra gli antichi il testè citato Eraclio, e tra' moderni Guidone Ubaldo, ne' comontari su Archimede, e Vossio nell' *Addenda* alla sua opera *de Scientiis Mathematicis*.

(e) Il giudizio di plagio letterario risulta dall' attestato di scrittori contemporanei; dal trovarsi traccia che lo indichi in altre opere dell' autore cui si crede appartenere la cosa plagiata; dall' osservarsi una certa differenza sensibile nel merito di questa produzione plagiata da altre dello stesso autore del plagio. Or alcuna di tali condizioni non ha luogo nel caso di Apollonio: poichè non vi ha scrittore contemporaneo che lo attesti; in altre opere di Archimede non s' incontra traccia onde rilevare cho l' ordinamento de' primi IV libri de' *Conici* di Apollonio sia identico a quelli da lui composti; ed Eutocio anche su di ciò fonda la sua opinione in negare questa imputazione di plagio (*Com. in Apoll.*); e finalmente molte altre opere prodotte da Apollonio lo attestano *gran geometra*, del qual nome gli stessi geometri suoi contemporanei l' onorarono, e lo dichiararono perciò capace a compier da se que' primi quattro libri, a' quali quattro altri ne aggiunse di non minor merito, o difficoltà de' precedenti. Senza dubbio, ch' egli nel comporre que' suoi primi quattro libri si valse delle verità precedentemente stabilite da Euclide, e da altri ancora; ma ciò non val certamente il commetter plagio.

sti libri, e di altre opere prodotte a dì nostri sullo stesso assunto, non v' incresca intendere alcune cose sull' orditura de' metodi, co' quali convien trattare simili materie.

5. I metodi co' quali si deggiono investigar le affezioni delle curve coniche, per poi disporle in uno scientifico sistema, parmi esser due, uno *diretto*, *inverso* l' altro. Il primo consiste nel piantar la genesi di esse curve, e nel raccorne le proprietà, onde distinguonsi, sviluppando la natura, ed i rapporti di quelle cose, che concorrono a generale. E nell' altro non si fa, che proporre una generalissima equazione quadratica indeterminata, dal cui maneggio le specie rilevinsi delle linee di *second' ordine*, le proprietà loro, ed i modi di generarle. Dunque l'eccellenza del primo di questi due metodi riducesi nella *semplicità della genesi* di ciascuna curva conica, e nell'*eleganza dello sviluppo delle di lei affezioni*; laddove quella dell'*inverso* vuol ripetersi dalla facilità di comprendere, e di eseguire quelle analitiche evoluzioni, onde raccolgonsi dalla mentovata equazione le proprietà di esse curve.

6. Or le curve coniche si possono intender nate dalla sezione del cono fatta con un piano in varie guise; i loro perimetri talor si generano con moti organici, talora per isviluppo di fili implicati a certa lamine convesse; ed anche colla riga, e col compasso è riuscito a' geometri di segnar que' punti, pe' quali passerebbero tali curve, o di segnarli

con convenevoli projezioni. Di più lo sviluppo delle proprietà loro può eseguirsi con un processo puramente sintetico, il quale principalmente consiste nella trasmutazione di ragioni geometriche[7]; ed esso può ben anche condursi con un giudizioso maneggio delle analitiche equazioni. Dunque diversi metodi si possono convenevolmente prescrivere, ed eseguire con eleganza, tanto nel formar gli Elementi delle curve coniche, che nel darne le loro istituzioni ai giovanetti.

7. Ma tra tutte le anzidette genesi delle curve coniche, qual n' è mai cotanto semplice, geometrica, e diretta quanto quella per sezione, per la quale esigonsi solamente il cono, e la posizione di un piano, senza che vi s' inviluppino e moti, e tensioni di fili, e congegnazioni di strumenti, ed altre cose dalla semplicità geometrica aliene [(d)].

---

[7] Quello, che in *Algebra* ottiensi col maneggio delle analitiche equazioni, nella *Sintesi* deesi proccurare colle trasmutazioni delle ragioni geometriche. E volendo convertire una qualche dimostrazione dall' un metodo nell' altro, non solo debbonsi aver familiari gli artifizi euristici di questi due metodi; ma conoscer benanche la loro corrispondenza.

(*d*) Di questa genesi si valsero gli antichi, da che tali curve furon denominate *sezioni coniche*; e vennero seguiti da' moderni, che furon primi a trattarne, come Claudio Midorgio, Gregorio da S. Vincenzo, de la Hire, Borelli, cui tenner dietro il Grandi, il Fergola, il Cagnoli, ed altri. Il Viviani, che in sua giovinezza occupossi a restituire i *Conici* di Aristeo, vi procedeva per la descrizione di una curva conica nel piano, come indicavalo nella prefazione alla sua divinazione *de locis solidis* dello stesso geometra antico, dicendo: *Multa collegeram, ut Conica elementa ejusdem Aristaei in lucem ederem, praemissa solummodo Conicarum sectionum in plano expedite describendarum generatione, non autem ut solet conum secando*. E dobbiam credere, che tal descrizione

8. Intanto i geometri anteriori ad Apollonio impiegavano il cono retto per la genesi di queste curve [8], esigendo che fosse perpendicolare ad un lato del triangolo per l'asse il diametro di ciascuna di coteste sezioni; e però dovean proporvi il cono rettangolo per la genesi della parabola, l' acutangolo per l' ellisse, e l'ottusangolo per l' iperbole. E quindi la parabola fu detta *sectio coni rectanguli*, l' ellisse *sectio coni acutanguli*, e l' iperbole *sectio coni obtusanguli*

9. Ma era serbato a quel gran geometra l'intender come da un qualunque cono, sia retto, o obbliquo, ciascuna delle curve coniche potesse ricavarsi, sol che un piano lo seghi in diverse guise. Ed ei chiamò tali curve *parabola*, *ellisse*, ed *iperbole*; poichè nella prima di esse il quadrato di ciascuna semiordinata pareggia il rettangolo del lato retto nella corrispondente ascissa; mentre nella seconda quello di questo è minore, e nell'iperbole n' è poi maggiore [9].

---

fosse per punti, come si vide poi praticato da lui medesimo nel lib. III. della suddetta divinazione. Ciò che avea ideato il Viviani, fu mandato ad effetto dal Wallis, non senza averne però prima trattato per sezione, stimando ciò necessario, *ne videar* ( così esprimesi ) *novas quasdam figuras comminisci*, *potius quam ab aliis repertas explicare*. Ed anche per questa parte così comportossi il de l' Hopital, e qualche altro accurato geometra apprezzatore del rigoro in Geometria. E ciò tanto più diviene necessario per coloro, che danno a tali curve una derivazione puramente algebrica.

[8] Vedi il comentario di Eutocio al libro I. di Apollonio.

[9] Recò maraviglia a' geometri antichi, che Apollonio avesse felicemente scoperta la genesi universale delle curve coniche, dando loro i

10. E volendo quì divisare gli argomenti di quegli otto libri, io non fo che trascrivere quel tanto, che Apollonio stesso n'espresse in una lettera ad Eudemo premessa al lib. I. de' *Conici*. — *Ex octo autem libris, quatuor primi hujus disciplinae continent elementa. Quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum, et earum quae oppositae dicuntur; itemque principalia ipsarum accidentia, a nobis et uberius, et universalius, quam ab aliis, qui de ea re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quae attinent ad diametros, et ad axes sectionum, et ad illas lineas, quae cum sectione non conveniunt, quae a Graecis* ἀσύμπτωτοι *appellantur: tum de aliis disserit, quae et generalem, et necessariam utilitatem ad determinationes afferunt. Quas autem vocem diametros, et quos axes ex hoc libro cognosces. Tertius liber continet multa, et admirabilia theoremata, quae utilia erunt, et ad solidorum locorum compositiones, et ad determinationes. Quorum complura, pulcherrima, et nova sunt.*

---

convenevoli nomi di *parabola*, da παραβάλλειν *aequare*, poichè in questa curva il quadrato della semiordinata pareggia il rettangolo dell'ascissa nel parametro, d'*iperbole* da ὑπερβάλλειν *excedere*, per essere il quadrato della semiordinata maggiore di quel rettangolo, e di *ellisse* da ἐλλείπειν *deficere*, perchè quel quadrato n'è minore, ond'essi meritamente lo chiamarono il *gran geometra*; il che viene attestato da Gemino.

(e) Nè egli introdusse per quest'oggetto nuove voci in Geometria, ma trasferì alle curve coniche quella stessa maniera di esprimersi de' geometri anteriori per l'applicazione di spazii parallelogrammi a linee rette, come si vede nelle prop. 28 e 29 VI. *Elem.* di Euclide, e nelle 57 o 58 de' *Dati*.

*Haec nos perpendentes, animadvertimus non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres , et quatuor lineas; verum ipsius tantummodo particulam quamdam ; atque hanc non satis feliciter . Non enim fieri poterat , ut ea compositio recte perficeretur absque iis, quae a nobis inventa sunt* [10] *. Quartus liber tradit quot modis conorum sectiones inter se, et circuli circonferentiae occurrere possint ; et multa alia ad pleniorem doctrinam , quorum nihil ab iis , qui ante nos fuerunt , memoriae proditum est. Coni sectio et circuli circumferentia , et oppositae sectiones ad*

—

[10] Apollonio qui intende parlare del famoso problema delle *quattro rette*. del quale vi recai la soluzione geometrica nella prima edizione di questo Elementi . Ma egli verso la fine del lib. III. de *Conici* rapporta le proprietà de' *fuochi* , o degli *umbilichi* , cho dagli antichi dicevansi *puncta ex comparatione facta*.

(f) Il motivo che indusse il Fergola a sopprimere nella seconda edizione , il suddetto problema fu , che essendosi egli attenuto all' ennnciazione e soluzione del Newton ( *Princip, Math*. lem. XVII.) questa non corrispondeva clio ad un caso del problema genorale secondo la mente degli antichi , il quale era così enunciato : *Date di posizione in un piano quattro rette : ritrovar il luogo de' punti da' quali tirando alle date altrettante rette in dati angoli , stia sempre il rettangolo di due incidenti a quello delle altre due in data ragione* : ed egli si aveva serbato trattarne nell'*Arte d'Inventare*( *Ved. il Prospetto di quest'opera pubblicato nel 1809, ed ora riprodotto innanzi alla medesima*).Ma non avendo potuto, per le sue gravi infermità , eseguire tal pubblicazione, contentossi che alla soluzione generale di quel famoso problema , nella maniera la più geometrica e particolareggiata , adempisse il suo distinto allievo Giuseppe Scorza, il quale finalmente , dopo la morte del Fergola , diede alla luce un tal lavoro intitolandolo *Divinazione dell'Analisi geometrica degli antichi* , per le ragioni che si potranno rilevare dalle dissertazioni premessevi. E noi ne ragioneremo con maggior distinzione in quelle che compiono il vol. I. degli *Opuscoli matematici* , che abbiamo promessi.

*quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Quintus enim de minimis et maximis magna ex parte agit*[11]. *Sextus de aequalibus, et similibus coni sectionibus. Septimus continet theoremata, quae determinandi vim habent*[12]. *Octavus problemata conica determinata. At vero omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia judicare.*

11. Il grandissimo pregio di questo insigne lavoro di Apollonio fece sì, che tra' greci stessi avesse avuti molti comentatori rinomati tra' quali Pappo alessandrino, che nel quarto secolo dell' era volgare illustrollo con molti lemmi. E nel quinto Eutocio ascalonita, la saggia Ippazia, e Sereno di Antissa[13]. Gli arabi dal *nono* secolo in poi fecero nel loro idioma alquante parafrasi su i primi sette libri de' medesimi *Conici* [(h)]. E verso la metà del

—

[11] Questo gran geometra, nel lib. V. de' *Conici* gittò le fondamenta delle teoriche moderne de' raggi *de' circoli osculatori, e delle evolute.*

(*g*) Il Malvio tra' moderni trattò geometricamente, ed in modo assai elegante de' cerchi i quali hanno la stessa curvatura delle curve coniche, mostrando quanto valga ancora in questo argomento il metodo degli antichi.

[12] Apollonio, nel lib. VII. de' *Conici*, esamina i rapporti, che hanno frà loro i diametri conjugati ed i parametri, sì nell' ellisse, che nell' iperbole.

[13] I comenti di questa donna e quello di Sereno si son perduti interamente; e son pervenuti a noi que' soli, che aveane composti Eutocio.

(*h*) I matematici arabi più chiari, che adoperaronsi in esporre i *Conici* di Apollonio furono *Thebit ben Corah*, e *Beni Moses*; e tra' persiani compendiaronli *Abalphath* ed *Abdolbmelec*; e finalmente circa l' anno 1250 illustrolli con note il celebre geometra *Nassir-eddin*.

secolo decimosettimo apparvero in Italia due versioni latine de' primi quattro libri di Apollonio, la prima, scritta infelicemente da Memmio veneziano nell' anno 1537, l' altra nel 1566 da Federico Commandino urbinate, con penetrazione, ed eleganza [14].

12. Ma i geometri di Europa in sino alla metà del secolo XVI° non ebbero che i primi quattro libri de' mentovati *Conici*; e ne agognarono mai sempre i rimanenti. Onde l' ab. Maurolico, insigne geometra messinese, volendoli restituire, col ponderarne i loro argomenti trasmessici da Pappo, ed espressi nella lettera recata nel §. 10, riuscì lodevolmente nel poter solamente abbozzare nell' anno 1547 il quinto, e 'l sesto libro de' *Conici* suddetti [(i)]. E Vincenzio Viviani celebre geometra fiorentino, seguendo le orme di Maurolicò, si pose ancor egli verso la metà del secolo decimosettimo ad ordire una geometrica *divinazione* al quinto libro di Apollonio, ch' è su i *massimi*, ed i *minimi*. Ma chi l'avrebbe creduto! cotest'opera del Viviani par che

—

[14] Commandino nella sua versione de' primi IV. libri di Apollonio soggiunse ad ogni dimostrazione di questo geometra tanto i comenti di Eutocio, che le sue note geometriche. Ed alla fine di una tal' opera recò i due libri *delle Sezioni cilindriche*, *e coniche* di Sereno Antisseno, il quale fiorì nel secolo V°. dell' Era volgare, e destinò quest' opera a togliere quel volgare pregiudizio, che l' ellisse conica fosse ben diversa dalla cilindrica.

(i) Deesi da ciò attribuire al Maurolico il vanto di aver il primo tentata la restituzione di opere perdute de' greci geometri; e col suo esempio spinti altri ad intraprendere lo stesso assunto.

avessene promosse in Europa non poche parafrasi arabe de' *Conici* di Apollonio, ed impegnati gli eruditi ad altrettante versioni. Imperocchè il nostro Borelli, essendosi imbattuto nella biblioteca Medicea in un manoscritto arabo [15], che conobbe chiaramente contenere i primi VII. libri di Apollonio, ottenne dalla generosità di Ferdinando II. Gran Duca di Toscana di farlo translatare in idioma latino da Abramo Ecchellense maronita; e Giacomo Golio peritissimo nelle lingue orientali, e nella Geometria, ritornando da oriente con molti manoscritti arabi, vi condusse anche tre de' rimanenti libri de' *Conici* di Apollonio, cioè il V. il VI. ed il VII. Ma la sua versione, e quelle di Claudio Hardy, e di Cristiano Ravio [16] uscirono alla luce dopo l' opera dell' Ecchellense.

13. Or mentre in Roma compivasi dall' Ecchellense, e colla cura dell' acutissimo Borelli la versione del manoscritto arabo, Vincenzo Viviani accelerò ad istanza de' suoi amici l' intrapresa *Divinazione*, e stampolla nel 1659, due anni prima della versione dell' Ecchellense, che fu anteriore, come si è detto quì sopra, a quelle de' due codici

---

[15] Ignazio Neama Patriarca Antiocheno lasciò in dono a Ferdinando I. Gran Duca di Toscana un gran numero di manoscritti orientali, fra' quali poi si rinvenne la parafrasi araba, che de' primi VII. libri di Apollonio aveano fatta Abalfato Aspahaneso. ( Ved. *la prefazione all' Apoll. del Borelli.*)

[16] Cristiano Ravio compì la sua versione coll' ajuto del dotto matematico Samuelo Rethero. (Ved. *Atti degli Erud. di Lips. ann. 1673. pag. 399*. E Giorgio Krafft *nell' Istoria della Geometria Sublime*).

Goliano, a Raviano. Intanto dopo d' essersi pubblicate siffatte versioni, piacque a' matematici di confrontare insieme il V°. libro di Apollonio colla *divinazione* di esso fattane dal Viviani; e da loro fu giudicato in alcune teoriche il geometra italiano del pari profondo, che quello di Perga, in altre esser ancor ito più lungi di Apollonio, cioè del gran geometra dell'antichità rimota. Onde meritevolmente potrà considerarsi questa *divinazione* del Viviani, come un degno supplemento alle antiche teoriche delle curve coniche.

14. Finalmente nell' anno 1710 uscì da' torchi di Oxford la più nitida, e la più magnifica edizione de' *Conici* di Apollonio, per opera di Edmondo Halley, ove quest' insigne geometra ed astronomo restituì benanche l' ottavo libro, con una geometrica *divinazione*, il cui titolo è: *Apollonii Conicorum liber* VIII. *restitutus, sive de problematis determinatis divinatio*. Ne' primi quattro libri vi è il testo greco con accanto la versione latina: gli altri tre, che seguono ordinatamente, sono nel solo idioma latino, ritratti dal codice Goliano, e dalla versione dell' Ecchellense; e l' ottavo libro è finalmente un lavoro dell' ingegno dello stesso Halley, ed ha per oggetto l' investigazione de' diametri delle curve coniche, che abbiano certe condizioni [k]. Questo profondo geometra avea pur

(k) Non avendoci Pappo lasciato descritto l' argomento, e la distribuzione di quest' VIII°. libro de' *Conici*, come di altre opere del *Luogo*

anche nell' anno 1706 pubblicata l' opera di Apollonio *de sectione rationis*, reintegrandola da un manoscritto arabo rinvenuto nella biblioteca Bodlejana , e vi aveva aggiunta la sua divinazione dell' altra opera *de sectione spatii* (l). E la prima di tali opere , per quanto si rileva dalla sua *epigrafe*, dalle cose che vi si contengono, e dalla indicazione che ne fa Pappo, è ben diversa dall' VIII° libro de' *Conici* di Apollonio , e dalla divinazione di esso fattane dallo stesso Halley. Nè quindi so intendere, come il dottissimo Krafft stenti a comprendere la diversità di queste due produzioni del sommo Halley. ( *Vedi la sua Historia Geom. sublim. p.* 23.) (m).

15. Or sebbene quest' opera di Apollonio fosse sembrata a' dotti sì pregevole e compita , che niun de' geometri dovesse aver ardimento di darle nuo-

*Risoluto* trovasi da lui fatto , o almeno non essendo tal sua descrizione a noi pervenuta , le congetture dell' Halley nell' imprendere questa sua restituzione hanno dovuto fondarsi solamente nel trovar che Pappo medesimo ci avesse lasciati gli stessi lemmi pe' libri VII ed VIII de' *Conici*; ond' è che di questi ne dovesse essere affine l' argomento, di tal che i teoremi Apolloniani del VII° libro non dovessero servire che alla determinazione de' problemi risoluti nell' VIII°: alla quale maniera di ragionare l' illustre uomo dichiara al suo amico Aldrichio, nella lettera premessa ad un tal libro , essere stato da lui indotto. Che che però sia di ciò , è sicuro che l' VIII° libro datoci da Halley l' è un' opera importante , utile alla scienza , e che merita di far continuazione a' VII libri superstiti di Apollonio .

(l) Per quest' opera di Apollonio , e per le altre ancora da lui composte pel *Luogo risoluto* si potrà riscontrare il vol. I. degli *Opuscoli matematici* , *dissert. 1.*

(m) Si riscontri su tal proposito la *dissertazione* citata nella noterella precedente.

vo torno, non che di aggiugnerle cosa nuova; pur-
nondimeno nel 1632 il cav. Claudio Midorgio, patrizio parigino, ebbe il coraggio di sistemar gli elementi delle curve coniche[17] in modo diverso dall'Apolloniano(n), e di aggiugnervi alcuni particolari artifizi da descriverle per assegnazion di punti(o). Ed

---

[17] Le opere di Maurolico diedero grandi lumi a Claudio Midorgio. (Ved. *la pref. de'* Conici *di Borelli*, e Krafft nel §.15. *delle istituz. della Geom. subl.*).

(n) Il titolo dell'opera del Midorgio è: *Prodromi catoptricorum et dioptricorum, sive Conicorum operis ad abdita radii reflexi, et refracti misteria praevii, et facem praeferentis*, di cui nota il Montucla esserne stati pubblicati i soli primi due libri fin dal 1631 (forse meglio il 1632, come nota il Wolfio, seguito dal Fergola qui sopra); ed in essi comprendevansi le principali dottrine de' *Conici*. Posteriormente furono ristampati nel 1639 con l' aggiunzione di altri due libri, e di nuovo nel 1641, edizione che il Montucla non conobbe, mentre poi ne reca una del 1660. Ed in quella del 41, che abbiamo sotto gli occhi, vi si dice: *libri quatuor priores*, senza che però vi sia la prefazione, in cui, come osserva il Montucla, parlavasi degli altri quattro libri.

(o) È questo l' oggetto di tutto il lib. II. Ma siffatto argomento importante per l' effettiva costruzione de' problemi solidi, e per gli usi pratici della Meccanica in generale applicata, fu in seguito con più facilità ed eleganza trattato con movimenti organici da Francesco Schooten, nella sua *Organica sectionum conicarum in plano descriptio*, pubblicata dagli Elzevir nel 1646; nella quale in oltre espongonsi altre dottrine geometriche degne di considerazione, ed in ultimo si aggiugne un' appendice per la *risoluzione* geometrico-analitica delle equazioni di terzo grado. Ed egli ripigliò poi lo stesso argomento principale di questo trattato nel lib. IV. delle *Exercitationes Mathematicae*. E contemporaneamente e con eleganza trattollo pure il Cavalieri nelle sue *Exercitationes geometricae*, impresse nel 1647.

Il Barrow occupossi ancora alla descrizione delle curve coniche con movimento continuo, nelle sue *Lectiones Opticae et geometricae*; ed il Cartesio della descrizione meccanica di curve trattò nel lib. II. della sua *Geometria*. E senza star qui ad enumerar altri che trattarono lo stesso

ei fu il primo, che chiamò *parametri delle curve coniche* quelle linee, che dagli antichi dicevansi *lati retti* [18]; la qual denominazione si è costantemente da' moderni geometri ritenuta (p).

16. Nell' anno 1647. apparve nella repubblica de' letterati la *quadratura del circolo, e dell' iperbole* del P. Gregorio di S. Vincenzo, gesuita de' Paesi bassi, opera ricolma di verità nuove, ed utili non solo alla dottrina de' *Conici*, che a' nuovi metodi d' inventare [19].

---

argomento, basterà per ultimo far menzione del compinto ed egregio lavoro del Mac-Laurin, col titolo di *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, pubblicato in Londra nel 1720, proseguendo, e perfezionando lo stesso argomento dal Newton incominciato nel cap. VI. dell' insigne trattato *Enumeratio linearum tertii ordinis*, intitolandolo: *de Curvarum descriptione organica*. Ma per le sezioni coniche in particolare, partendo da proprietà semplicissime di esse, esibì un' assai facile maniera di descriverle il marchese de l'Hopital, nelle sue *Sections coniques*, ch' è quella che noi esporremo nel lib. IV. delle presenti istituzioni, e dalla quale partì anche il Fergola nel suo *Trattato analitico delle curve coniche*,

[18] Il parametro dicevasi dagli antichi *latus rectum*, quasi *latus erectum*, perchè solevasi porre perpendicolarmente al *trasverso*.

(p) Ciò afferma Francesco Schooten nel comentario al lib. II. della *Geometria* del Cartesio (*pag. 208 ediz. di Elzevir del 1659.*).

[19] Ecco in tal proposito un vantaggioso giudizio di quest' opera fattone dal Leibnitz (*Accad. di Lips. 1695*): *Maiora subsidia attulere triumviri illustres, Cartesius ostensa ratione lineas Geometriae exprimendi per aequationes, Fermatius inventa methodo de maximis et minimis, et Gregorius a S. Vincentio multis praeclaris inventis*; ond' è che risulta assai parziale, e dettato da spirito antigesuitico il ragionamento che su di essa fa il Frisi, nella seconda edizione dell' *elogio di Bonaventura Cavalieri*.

(q) È da notarsi, che ancora il P. Gregorio da S. Vincenzo, nelle sue ricerche, profittò de' lavori del nostro Maurolico, come attesta il Borelli nella *prefaz. cit. a not.* 17, e 'l conferma il dotto Krafft.

17. Il sig. Giovanni de Witt, felice geometra, e sgraziato politico di Olanda [20], insin dall' anno 1658 compose gli Elementi delle *linee curve* divisi in due libri: nel primo de' quali recò la genesi delle curve coniche per moti di rette giacenti in un piano; e di là ne attinse sinteticamente, e con eleganza le proprietà loro (r). Ma nel secondo ei dissertò su i *Luoghi geometrici*, salendo gradatamente dalle più semplici in fra le *equazioni quadratiche a due indeterminate* alle più composte, ed universali.

18. In oltre il sig. de la Hire pubblicò nel 1685 un'opera compiuta sulle curve coniche, dimostrando col metodo sintetico tutto ciò che ad esse principalmente si appartiene. Questo celebre geometra adottò alcuni principii del Desargues, e dell' ingegnosissimo Pascal [21]: ma molte altre verità nuove ed eleganti aggiunse colla propria speculazione.

[20] Giovanni de' Witt avendo lasciati gli ameni studi delle Matematiche si diede alla politica, e co' lumi di questa scienza divenne tanto utile alla sua patria, quanto le fu Cornelio di lui fratello col suo coraggio. Ma tutti e due nel 1672 furono sgraziatamente tagliati a pezzi dal furor popolare adizzatosi dalla fazione dello statolder. Ippazia Alessandrina intendentissima della Geometria sublime, anche per una sollevazione del popolo, fu trucidata nel IV° secolo della Chiesa, come il fu ne' tempi più rimoti lo stesso principe de' geometri Archimede Siracusano per simili cagioni.

(r) Tra coloro che cercarono illustrare le dottrine Apolloniane de' conici, ordinandole in modo diverso dal tenuto dal geometra di Perga, merita un distinto luogo il nostro Giannalfonso Borelli, il quale pubblicò in Roma, nel 1679 i suoi *Elementa conica nova et breviori methodo demonstrata*.

[21] Questo distinto geometra, dal cui ingegno avrebbe dovuto la scien-

19. Verso la fine del secolo decimosettimo Cristiano Ugenio, acutissimo geometra Olandese, oltre ad aver nitidamente risoluti non pochi proble-

za ricevere maggiori vantaggi, servendosi di una retta divisa armonicamente seppe molte verità su i *Conici* dimostrare con eleganza, ed universalmente. Ma quest' opera è perduta, e solamente nelle lettere di Cartesio si fa menzione di essa: siccome poche cose ci sono pur pervenute di una consimile opera del Desargues.

(*s*) Intanto il de la Hire, nel valersi di que' principii della divisione conterminale di una retta, non fa alcuna menzione del Borelli, che l'avea prima di lui adoperata. Lo che dispiace agli eruditi. (*Vedi Krafft Geom. Subl. pag. 70*). Ed una tal divisione della retta era pure stata avvertita, pel cerchio, dal P.Gregorio da S. Vincenzo (*pr.67 de circ.*), e dal Viviani (*pr.3.lib.I de Max. et Min.*); ed ancora assai prima rinvenivasi per le curve coniche presso Apollonio, senza denominazione propria (*Conic.lib.III.pr.36 a 40*). E sol dovrassi esser grati al de la Hire per l'uso più esteso e metodico di essa, e per avervi ripristinata la più breve ed acconcia denominazione di *armonica*, desunta da ciò, che i tre numeri 3, 4, 6, che aritmeticamente la rappresentano (*Vedi* §.*68*.) costituiscono le tre principali consonanze musicali *ottava, quinta* e *quarta*, mentre il P.Gregorio da S. Vincenzo l'avea detta *divisione secondo la media ed estrema ragione proporzionale*, il Borelli *analogia conterminale*, e da altri fu detta *involuzione*: sebbene anche per tal riguardo il di lui compatriotta Blondel pretendesse essere stato il primo a caratterizzarla col nome di *armonica*. Ed è ben ragione il recar qui a parola un tal luogo del Blondel: » il y a deux choses, » que je ne saurois dissimuler. La premiere est l'étonnement que » j'ai eu, qu'encore que l'on ait écrit de si belles choses des Se- » ctions Coniques, et qu'entre les proprietes de leurs contingentes » celle-ci ait été reconnue pour une des principales et plus frequen- » tes . . . . . . . . . . . . Et quoique les plus gran- » ds géométres aient particulièrement recherché les admirables effets » de cette espéce de proportion, je n'ai pourtant vu jusqu' ici per- » sonne qui se soit avisé de l'appeller *Harmonique*. Il y en a quelques- » uns qui l'ont appellée *Involution*, d'autres ont dit que c'étoit *une* » *moyenne et extréme raison proportionelle*; mais pas un, au moins » que je sache, ni des anciens, ni des modernes, ne lui ont donné son » veritable nom. (*Mem. de l'Acad. des Sciences, dal 1666 al 1699 t.II. pag.* 35 *e* 36 *ediz. di la Haye.*). Non avvertì dunque questo geometra

mi solidi [22], trattò con eleganza delle *dimensioni* delle curve coniche, e delle loro *evoluzioni*. E l'immortal Newton destinò le sezioni IV, e V de' suoi

---

ed architetto francese alle definizioni riportate da Pappo quasi in principio del lib. III. delle *Mathematicae Collectiones*, ch' egli pur teneva sott' occhi, come si scorge dal suo stesso lavoro presentato a quell' Accademia.

Ma nè tampoco stimiamo fuori proposito di qui osservare, che il de l' Hopital, nel lib. VI. del suo trattato, per dimostrar le proprietà comuni alle curve coniche rapporto a' diametri, alle tangenti, ed agli asintoti, si valse ingegnosamente del cono, e di un piano passante pel vertice parallelo a quello della sezione conica; dando per tal modo di que' teoremi dimostrazioni più facili e brevi di quelle che incontravansi in altre opere su' *Conici*, ove si era fatto uso della *divisione armonica*. Ed egli però conchiudendo un tal libro così dice; » C' est » ce que je crois avoir exécuté d' une maniere fort aisée, et entiérement nouvelle, puisque je ne me suis point servi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les géométres modernes après M. *Paschal* et *Desargues*; ce qui les a obligés d' avoir recours à un grand nombre de lemmes, dont les demonstrations seules me » paroissent aussi longues que celles de tout ce livre «. Ma chi vorrà paragonarle con le corrispondenti nel presente trattato elementare, troverà che potevansi quelle ancora elegantemente ottenere senza esservi bisogno dell' espediente preso dal dotto geometra francese. E ciò che più monta lo troverà con pari eleganza rilevate analiticamente nell' altra opera del Fergola sulle curve coniche, mentre il de l' Hopital, deviando dal suo istituto, dovè ripiegare in dimostrazioni prettamente geometriche.

[22] Questo gran geometra sciolse con indicibile eleganza i seguenti problemi su i *Conici* — *Ritrovare una retta uguale ad un dato arco parabolica*—*Esibire un cerchio uguale alla superficie della conoide, che vien generata da una sezione conica rivolta intorno al suo asse*: ed altri. Ma tra queste soluzioni quella dell'antichissimo problema di *dividere la sfera in data ragione*, sembra di una maravigliosa semplicità: imperocchè egli la fa solamente dipendere dalla trisezione dell'angolo, senza ricorrere alla combinazione della parabola e dell' iperbole, o dell' iperbole e dell' ellisse, come fecero alcuni geometri antichi (*Si potrà riscontrare la nota corrispondente a tal problema nella part. 2 dell'* Invenzione geometrica). Ma un nostro geometra ha dimostrato potersi trarre

*Princ. Matem. della Filos. Nat.* ad isnodare alquanti difficilissimi problemi sulle *Tazioni* di tali curve. Questo geometra, ch'era tutt'intento a promuovere il suo metodo delle *Flussioni*, ed a chiarir colla Geometria le arcane legge de'cieli, e della Natura, s' intrattenne per alleviar sue cure nelle amene vie dell' Analisi antica : e quivi abbattendosi al problema *delle quattro rette* [23], di cui si cercava fin da que' tempi la geometrica composizione [24], il disciolse immantinente, ed in egregi mo-

—

dal proposto problema l' equazione $x^3 - 3r^2x + r^2(2r-h) = o$, ove $r$ dinoti il raggio della data sfera, $x$ la distanza del centro della sfera dal piano segante, ed $h$ l' altezza del cono, che abbia per base il circolo massimo, e sia uguale ad uno de' segmenti richiesti ( *Trat. Anal. de'Luoghi geometrici* §. *145.*) Ed essendo cotesta equazione pariforme a quella, che il Cartesio rinvenne per la trisezione angolare, sarà facilissima cosa il ridurre quel problema a questo, e poi comporlo geometricamente.

(*t*) Nè deesi qui omettere di far menzione dell'elegante soluzione geometrica di tal problema, che facendo intersegare un cerchio con una parabola ne ha data l' egregio nostro prof. Francesco Bruno, che agli amatori di una sintesi pura riescirà assai grato riscontrare nel suo dotto opuscolo, cui ben corrisponde il titolo di *Soluzioni geometriche di alcuni difficili problemi solidi*, pubblicato nel 1824.

[23] Si vegga l'enunciazione generale di un tal problema nella nota (*f*).

[24] Cartesio parlando nel libro I. della sua *Geometria* di una tal quistione si disse : *quam nec Euclides, nec Apollonius. nec quisquam alius penitus resolvere potuerat*. Ed autenticò la sua opinione de'seguenti detti di Pappo ( Pref. lib. VII. Coll.Mat. ): *Quem dicit Apollonius in lib. III locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius.* Ed io vi aggiugnerei le rimanenti parole del medesimo paragrafo, cioè : *sed neque paullulum quid addere iis, quae Euclides scripsit, per ea tantum Conica, quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt, ut etiam ipse testatur dicens, fieri non posse ut locus perficeretur absque iis, quae ipse*

di. Poichè egli nel congegnarne l' anzidetta composizione, non si valse di altri principii, che di que' soli, che a' geometri greci eran noti.

20. Nel principio del secolo antipassato Lorenzo Lorenzini, che fu distinto allievo del Viviani, nell' ozio, e tra'disagi di una prigione, ove per venti anni sciaguratamente fu ritenuto, compose sei *esercitazioni geometriche*, chehan per oggetto le *sezioni coniche*, le *cilindriche*, i solidi nati dalle loro rivoluzioni, le *linee logaritmiche*, ed altri punti interessanti di Geometria. Ed ei non solo seppe ingradarsi oltre le invenzioni Apolloniane, e Vivianee: ma ristaurò pur anche l' arte di elegantemente geometrizzare alla maniera greca, che gl' italiani si pregiaro-

*scribere conatus sit*. E questi detti di Pappo alludono a ciò che Apollonio avea indicato nell' epigrafe del lib. III. de' Conici (§.10.). *Non enim fieri poterat ut ea compositio recte perficeretur absque iis, quae a nobis inventa sunt*. Or da tutto il contesto di Pappo, e dalla detta epigrafe di Apollonio un' altra illazione in quì ritraggo, cioè, che co' soli *Conici* di Aristeo, nè Euclide, nè Apollonio, nè verun altro geometra potè mai comporre il problema *delle quattro rette*. Apollonio vi scoprì nuovi principii per la perfetta composizione di un tal *luogo*, e con essi riuscì lodevolmente. Ed in vero, se Apollonio non avesse composto il problema delle quattro rette, come poteva categoricamente asserire un tal luogo essere una delle tre curve coniche data di posizione? Or se il compose, dovè anteriormente praticarvi con buon successo l' analisi geometrica, cioè risolverlo: dovendo quella nascer da questa. E s' ei avesse tentata la soluzione senza guidarla a fine (al che alludono le parole del Cartesio) non avrebbe menata una sì magnifica jattanza, ed a spese del mitissimo Euclide, rimprocciandogli quel che si legge nell' epigrafe del suo libro terzo de' *Conici*, nella citata lettera ad Eudemo (§.10.).

(u) Si riscontri ancora da questo argomento la I^a. dissertazione nel vol. I. degli *Opuscoli*.

no mai sempre di emulare. Una sola però di queste *esercitazioni* fu data in luce nel 1721 (x), e le altre serbansi tuttora nella biblioteca Magliabechiana [25], quai preziosi parti del suo ingegno (y).

21. Per la dimensione de'curvilinei ne abbisognavano metodi particolari, ed i geometri con la loro penetrazione vi provvidero in varie guise; delle quali non è fuori proposito indicare quelle che al nostro argomento geometrico più si confanno.

### METODO DE' LIMITI.

22. Il grande Archimede impegnatosi *alla dimensione de'curvilinei*, che in que'tempi era un oggetto nuovo, ed interessante in Geometria, adottò quel distinto, e sicuro metodo d'*Esaustione*, o de' *Limi*-

(x) Il lavoro del Lorenzini circa le curve coniche non è però un trattato di esse, come par che avesse creduto il Krafft, così esprimendosi: *Methodo veterum sectiones conicas pertractavit quoque Laurentius Lorenzini, Italus, in Exercitatione geometrica, quam detentus in carcere elaboravit (Inst. Geom. subl, pag. 27.)*. Ed è forse a credere, ch'egli non avesse nè men veduto un tal libro, che divenne ben presto raro ancora in Italia, poichè sarebbe bastato a rimuoverlo dall'equivoco in cui cadde il semplice frontispizio del medesimo, nel quale descrivesi minutamente tutto il contenuto in esso.

[25] Vedi Ferronio ne' *Prolegomeni delle grandezze esponenziali pagina* XXV.

(y) Il Lorenzini finì di vivere nel tempo che pubblicavasi questo suo primo lavoro; da che avvenne, che le altre cinque *Esercitazioni* rimanessero inedite. E dee dispiacere, che mentre nel secol presente si va tanto frugando in pubbliche biblioteche, per pubblicar cose che v'eran rimaste ad inpolverare, perchè di poco momento, nessun italiano avesse mai pensato a questi utili lavori per la scienza geometrica, di un loro sì distinto compatriotta.

*ti*, dal cui seno poi sgorgarono gli altri due degl' *indivisibili*, e *delle prime ed ultime ragioni* [26]. Se in una figura curvilinea (ecco un abbozzo di questo metodo) continuamente iscrivansi rettilinei, ed altrettanti le si circoscrivano, sicchè la differenza di quelli e questi possa divenir minore di qualunque grandezza assegnabile, tanto i rettilinei iscritti nella figura curvilinea, che i circoscritti si diranno *terminare* in essa: e questa figura sarà *limite* degli uni e degli altri. Or da queste nozioni traggonsi due principii regolatori delle dimostrazioni di tal genere. I. *Quelle grandezze, che hanno un' istesso limite, si debbono avere per uguali.* II. *Se le grandezze, che continuamente iscrivansi in due figure, ed in sin che terminino in queste abbian sempre fra loro una data ragione; questa medesima ragione dovranno avere le figure anzidette* [27].

---

[26] Ecco ciò che dice Wallis di Archimede: *Vir stupendae sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur.*

(z) Ed in vero i metodi sommatorii de' moderni, per la loro attività e speditezza di gran lunga superiori a quello de' *limiti*, non solo da questo derivano; ma spesso a mostrare la loro genuinità conviene far conoscere, che in quello rientrino: di che sarà ragionato altrove, ed in luogo più proprio.

[27] Vedi Maclaurin, nell' Introduz. al *Traité des Fluxions*, e Ferronio sul *Binomio Newtoniano* §. 9. *Oper. cit. nella not. antepr.*, per l' estensione di un tal principio.

(aa) Per più chiarimento di questo metodo si potrà riscontrare la nota corrispondente al lib. I. di Archimede *sulla sfera e sul cilindro*.

### METODO DEGL' INDIVISIBILI.

23. Bonaventura Cavalieri geometra milanese, il cui nome sarà sempre chiaro in Europa pel suo metodo *degl' Indivisibili*, e per le molte verità con esso brevemente dimostrate, gittò egli il primo le fondamenta de' *Metodi sommatorii* di che poi si valsero non pochi illustri matematici per la dimensione de' curvilinei. Questo metodo, ch' è bene d'illustrare a'giovanetti, parmi esser diviso in due rami, il primo de' quali io quì adombro, e per le sole figure piane; poichè l' altro può conoscersi da questo [28], e l' uno, e l' altro ai solidi applicarsi. Così sulla linea retta AD [*fig.a.*], e dalla medesima parte di essa, sien costituite le due figure piane AFB, CGD di uguali altezze; ed ovunque nelle dette figure conducasi la linea retta $ad$ parallela a quella base. Ed oltre a ciò le parti $ab$, $cd$ di questa linea retta sieno sempre nella costante ragione di $m$ ad $n$; *le mentovate figure* AFB,CGD *dovranno benanche avere la medesima ragione di* $m$ *ad* $n$. Imperocchè, *per la* 12. V. *El.* tutte le linee rette AB, $ab$, *ec.* a tutte le altre CD, $cd$, *ec.* sono nella ragione di $m$ ad $n$. Dunque la figura AFB starà all' altra CGD come $m$ ad $n$ (bb).

[28] Ved. *Geom.* di Cavalieri lib. III. e IV.

(bb) Il Cavalieri fin dal principio dell'anno 1626 era venuto al termine della *Geometria indicisibilum*, ed aveva geometricamente sciolta gran parte de' problemi già da undici anni proposti dal Keplero nella sua *Stereometria doliorum*, spianando la strada ad altri geometri per risolvere tutti gli altri problemi analoghi.

24. Ma quest' ultima illazione non può reggere in alcun modo, se non suppongasi, che tanto le linee rette AB , *ab* , *ec.* , che le altre CD, *cd* , *ec.* occupino le due figure AFB , CGD respettivamente. Il saggio geometra temendo di cadere nella Zenonistica composizion del continuo con siffata *occupazione*, cercò di scansarla. Ma venendo gagliardamente costretto dalle imputazioni , che poi gli fece il Guldino [(cc)], si lasciò dire: *me non numerum ipsarum comparare , quem ignoramus , sed tantum magnitudinem , quae adaequamus spatio ab iisdem occupato ( scol. prop. 1. lib. II. )* . E poi dichiarò, che quelle linee rette occupatrici de'detti spazi doveansi prendere per altrettanti rettangoli ridotti alla minima loro latitudine ; e che il suo metodo, sebbene sia più energico ed attivo di quello de'limiti, abbia non per tanto la medesima di lui natura. E perciò noi potrem dire coll'illustre Newton, che questo metodo del Cavalieri, ch'è succinto ed attivo nel dimostrare, sia *alquanto duro* [(dd)].

---

(cc) Nella sua *Centrobarica* . Ma questo gesuita non contenendosi ne' limiti di una stretta critica , arrivò fino a disputare al Cavalieri il merito di tale invenzione, lasciandogli solamente quello di aver generalizzati alcuni teoremi Kepleriani.

(dd) Il Cavalieri medesimo non tralasciò di confessare una tal durezza nella maniera di esprimere il principio fondamentale del suo metodo , e nella voce stessa d' *indivisibili* , che vi adoperava ; soggiugnendo di aspettarsi l' Alessandro, che sciogliesse questo nodo Gordiano : nè gli fallì la predizione , essendovi dopo ben un mezzo secolo riescito il Newton col suo metodo *delle prime ed ultime ragioni* , dal quale sgorgò poi naturalmente il *calcolo differenziale* .

METODO DELLE PRIME ED ULTIME RAGIONI.

25. Ma il sommo Newton stimando poco dicevole alla natura delle grandezze continue il crederle nate per addizion di particelle minime indivisibili, quali supponevansi dal Cavalieri, dal Torricelli, e dal Wallis[29]; un' altra genesi volle compir di esse, ed un altro metodo per la misura dei curvilinei prescrisse. Pensò il granduomo, che in rigor di Geometria ogni quantità continua si debba intender generata dal moto di un punto, di una linea, o di una superficie, secondo che quella contenga una sola dimensione, o ne abbia due, o ancor tre. E vi soggiunse, che di tali grandezze si debbano prendere le prime parti *nascenti*, o le ultime *evanescenti*, quando si tratti della misura dei curvilinei. Ma coteste particelle non sono geometricamente assegnabili; ed anche niun vantaggio si conseguirebbe nel considerarle di una infinitesima, ed inconcepibile grandezza. Perciò accortamente ei si restrinse a prender le ragioni di quelle quantità nascenti, o di quelle altre evanescenti: poichè i termini di siffatte ragioni sono grandezze finite, e paragonabili fra loro. Ei chiamò que' rapporti *le prime*, o *le ultime ragioni*; e con tal principio distese tante leggiadre dimostrazioni, che osservansi ne'

[29] Il Wallis avendo applicato il calcolo alla Geometria degl' *Indivisibili* spinse più oltro cotesto metodo. Ma le suo ricerche particolari non furono, cho un' ombra di ciò che poi fece il cavalier Newton, nel *Methodus fluxionum et serierum infinitarum.*

*Princip. Matem. della filosofia naturale*, e da cui derivò l' *Analisi delle Flussioni*, ch'è un metodo assai più attivo, ed universale di quelli di *Esaustione*, e degl' *Indivisibili.*

26. Or io eccederei la meta del mio assunto, se volessi prefigger le leggi di cotesto metodo, non per tanto, per chiarimento di esso, recherò il seguente geometrico esempio. Nella curva AMD [*fig.b.*]; qualunque sia la sua natura, si tiri per lo punto M la tangente MH, la normale MK, e l' ordinata MF all' asse AK. E poi la corda, che passa per lo contatto M, e per lo vertice A, intendasi rotare intorno al contatto M, e verso la tangente MH. Cotesta retta andrà tagliando da tal curva archi sempre minori de' primi, e formerà coll' ordinata MF altrettanti angoli, che tanto meno dovran differire dall' angolo FMH fatto dalla stessa ordinata, e dalla tangente, quanto più la retta rotante si appresserà alla tangente. Or supponghiamo esser MG l'ultimo de' detti archetti; sarà il triangolo MEG simile all'altro MFK, e quindi la ragione dell' ultimo archetto evanescente MG alla sua altezza GE, sarà quanto quella della normale MK all' ordinata MF. E sarà pure ME ad EG, come la stessa ordinata MF alla sottangente FH. Il perchè, se la curva AGM sia una parabola, ed allo spazio esterno intendasi circoscritto il piccol parallelorammo PMER, e l' altro corrispondente FMNB sia circoscritto allo spazio interno; sarà il primo di questi parallelogrammi all'altro, perchè equiango-

li, in ragion composta di PM ad MF, e di MP ad FH, vale a dire come PM ad FH, o come 1 a 2, essendo in questa curva la sottangente dupla della sua ascissa, come dimostrasi nel seguente primo libro. Dunque sarà il parallelogrammo PE una metà dell'altro MB. E così tutto lo spazio esterno PAGM dovrà essere una metà dell'interno MFAG, e quindi un terzo del parallelogrammo MFAP (ee).

27. Alcuni di que' moderni geometri, di cui si è fatto quì sopra onorevol menzione, consegrarono all' utile della gioventù studiosa alquante brevi istituzioni sulle curve coniche. Così il nostro Borelli nel l'anno 1679 pubblicò un compendio de' *Conici* (ff), dimostrando con indicibil nitore quanto ei si propose su tale assunto: e quivi si valse della *divisione conterminale di una retta*, per principio di alcune dimostrazioni [30], di cui la più parte son dedotte dalla genesi di queste curve pel cono. Il sig. de la Hire nell' istesso tempo stampò in Parigi un giudizioso opuscolo sulle curve coniche, aggiungendovi i luoghi geometrici per la composizione de' problemi solidi. E dopo di esso il P. Guido Grandi abate camaldolese diede in luce un *Compendietto delle Sezioni Coniche*, il quale, secondo che ne giudicò il dottissimo Cristiano Wolfio, è un libretto *mole parvus sed ubertate rerum gravis*.

(ee) Si vegga di ciò altro esempio nella prop. 21. lib. V.

(ff) Veggasi la precedente noterella *(r)*.

[30] La division *conterminale* è la stessa che l' *armonica*. ( *Vedi la precedente nota* (s) ).

28. Nell' anno 1735 apparvero in Edimburgo le *Sezioni Coniche* di Roberto Simson, che meritamente può dirsi l' Apollonio anglicano, che vi vennero poi riprodotte nel 1750 [gg]. Alla fine dello stesso quivi usciron da' torchi gli *Elementi delle curve coniche* del sig. Hutton, i quali secondo il Montucla sono un modello di chiarezza e precisione. E nella nostra Italia si è prodotto dal dotto Cagnoli un elegante *trattato delle Sezioni Coniche*, che piace a' geometri.

29. Molte altre istituzioni su i *Conici* si sono in diversi tempi, e da diversi geometri congegnate, che il solo indicarle farebbemi ecceder la meta, che mi ho proposto. Ond' io passerò volentieri a divisare i principali corsi analitici delle *Sezioni Coniche*, per compiere una storia ragionata di questo argomento, trattenendomi per poco sulle scoverte fatte dal Cartesio in tal soggetto [hh].

30. Il Cartesio, innestando alla Geometria le analitiche grandezze, e le operazioni di queste agli

---

(gg) *Sectionum conicarum lib. V. ec.* in 4°. E per dir alcuna cosa di quest'egregio lavoro di geometra sì profondo, egli parte sì dalla descrizione organica di tali curve nel piano, ma non tralascia poi di dimostrare corrisponder esse a quelle nascenti dalla sezione nel cono; il che, come vedesi, fa rientrare la sua esposizione in quella alla maniera degli antichi; e vi dimostra molte converse delle proposizioni da altri recate, altre nuove egli ne aggiugne, che estendono il campo vastissimo delle proprietà di queste curve, o somministrano nuova materia all' analisi, ed alla composizione de' problemi solidi.

(hh) Per riguardo a' trattati analitici delle curve coniche si potrà anche riscontrare la dotta prefazione del nostro autore alle sue *Sezioni Coniche analiticamente trattate*.

artifizi di quella ragguagliando, scoprì il convenevol modo da esibire la natura di ciascuna curva per l' equazione fra le coordinate di essa. E da ciò si conchiuse una *curva esser geometrica, o meccanica*, secondo che la sua caratteristica equazione contenga grandezze algebriche solamente, o ne abbia benanche trascendenti. Che anzi le linee geometriche si sogliono classificare *in ordini o in generi* nel seguente modo. *Una linea dicesi del I° ordine*, se la sua equazione a due indeterminate non ecceda la prima dimensione, com' è la retta. E si dicono *linee di II° ordine*, o *curve di primo genere* quelle altre, le cui equazioni ascendono al 2° grado. Ed a tal classe appartengono le curve coniche, di che quì appresso ragioneremo. In oltre appellansi *linee di III° ordine*, o *curve di II° genere* quelle altre, le cui equazioni fra le due variabili, che vi esprimono le rispettive loro coordinate, sono di terzo grado. E così più appresso (ii).

(ii) Il Cartesio distinse le curve in *generi* comprendendo nel 1° genere le sole curve la cui equazione a due indeterminate ascendeva al 2° grado; e poi nel 2°, 3°, *ec. genere* quelle curve la cui equazione a due indeterminate fosse del 3° ovvero 4° grado, 5° ovvero 6°, e così in seguito procedendo sempre di due in due gradi dell' equazione per ogni genere (*Geomet. lib. II. in princ.*). Ed egli forse così regolossi imitando gli antichi nel problema *alle rette*, che come ben videro il Fergola e lo Scorza era un facil mezzo per la classificazione delle curve algebriche (*Luoghi solidi* §. *107*).

Ma il Newton, non contento di tal divisione, un' altra ne diede, nel suo trattato *Enumeratio linearum tertii ordinis*, ch' è quella quassù indicata. Ed i geometri posteriori tra' quali l' Eulero e 'l Cramer si sono attenuti alla sola e più distinta divisione in *ordini*, rare volte trovandosi adoperata la corrispondente divisione in *generi*. E ciò era necessario avvertire per togliere ogni equivoco dall' animo de' giovani.

31. E quindi ad un sagace, e franco calcolatore sarebbe stata lieve cosa il trarre le *equazioni alle curve coniche* da una qualunque genesi, che loro si premetta, e poi, dal maneggio di tali equazioni, rilevare le proprietà di cui sono colme coteste linee di second' ordine. Ma il raccorle tutte con un agevole calcolo analitico, e da una genesi organica semplice, ed elegante era serbato all' illustre marchese de l'Hopital. Questo nobil germe della splendidissima famiglia Gallucci, da Napoli traspiantata in Parigi, seppe, ne'dieci libri *del suo Trattato analitico delle Sezioni Coniche*, leggiadramente dimostrare quanto a queste curve si appartiene; temperando con mirabil arte i sintetici lavori con quelli che l' Algebra offre. Ei vi aggiunse i *Luoghi Geometrici*, discendendo dalle generalissime equazioni delle curve coniche alle particolari, e semplici; e prescrisse il modo di costruire le equazioni di *terzo*, e di *quarto grado* colla combinazione di esse curve. Quest' opera fu compendiata dal sig. Trevigar negli *Elementi delle Sezioni Coniche* stampati in Cambrigia nell' anno 1731. Ed altri geometri ebber poi prodotti simili opuscoli sullo stesso assunto, per utile della gioventù studiosa; tra' quali distinguonsi quelli del Wolfio, e dell'abate Marie, il quale fonda la sua analisi nella genesi di esse curve per la sezione del cono.

32. Ma alcuni moderni, sagacissimi analisti han desiderato, che in quell' opera del marchese de

l' Hopital vi fosse più pura , ed insiem più attiva quell'analisi , che vi s' impiega ; poichè la piupparte degli artifizi euristici non sono che geometrici , e di tal natura sono anche molte dimostrazioni , che quivi appajono con simboliche divise . E perciò si è fra noi procurato di produrre un *Trattato analitico delle curve coniche* [kk] , ove premessa la genesi organica di esse curve , con mezzi puramente algebrici , e col regolo della Geometria Cartesiana vengono sviluppate le più utili , ed insigni proprietà loro , relativamente *a' diametri di esse curve , alle tangenti e seganti , a' fuochi , ed alle dimensioni* . E risolvonsi moltissimi difficili problemi .

33. Ciò premesso ecco le leggi del *metodo inverso* , onde sovente giova trattare i *Conici*. Si pianti l' equazione fondamentale alle linee del second' ordine, nella massima generalità possibile , come l' è questa $A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2=o$ . Si procuri di aver distinte , e familiari tutte le convenevoli evoluzioni , che soglionsi utilmente praticare sulla proposta equazione . Da ciò si rilevino con quella semplicità , ed ordine , che si conviene , le seguenti determinazioni , cioè *le specie delle linee di second' ordine* ; *le forme de' loro rami curvilinei* ; *la natura, e 'l sito de' loro diametri* ; *le sot-*

---

(kk) *Trattato analitico delle Sezioni Coniche* di Nicola Fergola, 1814 in 8° , ed indi riprodotto con note in 4. nel 1828 , e nel 1836.

*tangenti*, *gli assintoti*, *e le normali*; *i numeri de' punti in che segansi fra loro*, *o con le linee rette*; *i rapporti delle corde*, *che si tagliano fra loro*, *o che procedano da un qualchè punto insigne di esse curve*; *ed altre simili ricerche*. Questo piano puramente analitico fu la prima volta con eleganza eseguito dal sommo analista Eulero, e poi adottato da' celebri matematici Cramer, P. Vincenzo Riccati, Saladini, la Croix, e da altri ancora.

### Aggiunzione alla storia precedente.

34. Dopo le brevi notizie storiche su' *Conici*, lo stato attuale della istituzione in esse richiede, che alcuna cosa si aggiunga atta a regolarne l'apprendimento, ed a stabilire la ragionevolezza de' motivi, che ci hanno questa volta indotti ad accrescerne le dottrine; onde non si abbia a giudicare essersi ciò fatto per un puro lusso di scienza, o per troppa vaghezza di questa.

35. E cominciando dal secondo degl'indicati oggetti convien riflettere, che quantunque nella scuola di Platone, e fino ad Euclide, molto si fosse lavorato intorno alle *sezioni coniche*, d'onde gli Elementi di queste ordinati finalmente da costui, ed i cinque libri de' *Luoghi solidi* del geometra Aristeo; purtuttavia la composizione dell' arduo problema *alle tre*, *e quattro rette* non potè ottenersi, senza nuove proprietà de' *Conici*, che Apollonio aggiun-

se [II], oltre quelle, che per le intersezioni delle curve coniche col cerchio, necessarie alla determinazione, e composizione de' problemi *solidi* in generale, veggonsi nel libro IV. de' suoi *Conici*; ed alle altre, che per abbondanza di scienza suppli ne' rimanenti quattro libri di sua propria escogitazione. E ciò solo basta a mostrare, che i *Conici* di Euclide non avevano raggiunta quella perfezione, per l' ordine, ed il nesso delle proposizioni, tanto ammirata ne' suoi *Elementi*. Nè tampoco l' acquistarono per l' opera aggiuntavi da Apollonio; sicchè da' geometri moderni, dopo il rinascimento della Geometria, potettero i medesimi ricevere ed aumento di verità, ed un ordine diverso di queste, e dimostrazioni ancor nuove, come dal *num.* 15 al 20 della precedente *storia* si è accennato: e ciò con vantaggio della scienza, ed utilità de' coltivatori di essa. Nè tampoco altri geometri distinti, di tempi a noi più prossimi, si ristettero dall'esporre in nuova forma siffatte dottrine, e con loro lode, de'quali alcuno se n' è indicato dal *num.* 27 al 29.

36. Stando così la faccenda, può ben concedersi ancora a noi, il dimostrare in nuova guisa talune verità, l' aggiugnerne altre, non che variare alquanto in ordinarle, quando dal fatto risultasse una maggiore facilità, ed uniformità nelle dimostrazioni. Ed invero quel principio sì famoso della proporzione armonica, che nelle opere degli an-

(II) Vegg. il luogo della prefazione di Apollonio riportato nel n. 10.

tichi ben ravvisavasi (mm), e di cui Apollonio, e Sereno si erano pur prevaluti ne' loro lavori sul presente argomento, che mirabilmente vi fu adoperato dall' insigne Pascal in isviluppare tutte le proprietà de' *Conici*, di che ci è pervenuta disgraziatamente la sola notizia, e del quale ancor con vantaggio usarono il Desargues, il Borelli, il de la Hire, ed altri(nn), non pure ha questa volta guidati ancor noi ad imbatterci in nuove proprietà delle curve coniche, delle quali v' era bisogno per altre ricerche; ma ha dato a tutta la loro teorica un nesso più stretto, ed una grande facilità in dimostrare: di che alcuna cosa sarà detta nelle *note* in fine del presente trattato, a solo oggetto di render ragione de' cambiamenti più rimarchevoli da noi fatti.

37. Ma quello che più richiedevasi era il portare la presente istituzione de' *Conici* al grado, che esigevano le tante nuove escogitazioni de' moderni in problemi ad esse correlativi, principalmente d' iscrizioni, e circoscrizioni posizionali di poligoni ad esse: e queste ricerche grandemente estesesi nelle mani del dotto, e laborioso geometra Nicola Trudi, all' occasione del *programma* da noi proposto nel 1839, avevano confermata la necessità di rendere elementari le sparse teoriche delle *polari reciproche*, e di convenevolmente estenderle. I principii di questa importante dottrina ben ravvisavansi ne' *Conici* di Apollonio: ma questo gran geometra, che ad al-

(mm) Si vegga in fine del trattato la nota al *lemma* (§ 76.).
(nn) Vegg. il n. 18, e le note corrispondenti 21, ed s.

tro teneva rivolto il pensiero, nell'estendere la scienza de' *Conici*, non cercò oltre produrli; nè tampoco se n' erano occupati i geometri della rinata Geometria: e forma non piccol pregio di nostra scuola, ch' essi comparissero fecondati in taluni lavori inediti della medesima, che neppur potremmo dire a chi si appartenessero, trovandoli senza alcuna indicazione tra' MSS. del Fergola, da rimontare però all' epoca di circa il 1806. Ma pure un caso importante di questa teorica trovavasi dal nostro Scorza rilevato nel §.7 del *III° opuscolo* della raccolta pubblicata nel 1810. È vero che un tal caso riguardava il cerchio: ma ognun sa, che sia facile l' estendere alle curve coniche in generale le proprietà di questo, quando in esse non concorrano condizioni angolari; e però non trovando noi usata da altri la teorica *delle polari reciproche* prima del 1810, quando furono pubblicati quegli *opuscoli*, potremo con buona ragione credere, che ne avessimo data la spinta a trattarla. Ed ora ei gode l' animo in vedere, che, ritornata essa in nostra scuola, comparisca per la prima volta elementarmente esposta nelle istituzioni de' *Conici* (oo).

38. Avevamo fin dall' edizione del 1828 aggiunto un libro (il quarto del trattato) distinto in tre capitoli, l'uno delle *intersezioni delle curve coniche*,

(oo). Veggasi la nota alla prop. 15. lib. I. Ma un tale argomento si vedrà con ispecialità, ed estensione trattato nella parte II. dell' *Invenzione geometrica*.

tra loro, o col cerchio; il secondo sulla *curvatura di esse*; e finalmente il terzo sulla *descrizione* delle medesime: materia la prima, e terza di grande importanza per la determinazione, e composizione de' problemi *solidi*. Ma questa volta ancor le indicate materie hanno cambiato di estensione, e di forma; e si vedrà di quanta utilità sia riescita l' applicazione di quel principio stesso della divisione armonica di cui si è precedentemente ragionato.

39. L'argomento della *curvatura* delle sezioni coniche, il quale nelle precedenti edizioni limitavasi ad una definizione, e ad un teorema, l' è pur questa volta diventato, un compiuto trattato delle *osculazioni* delle curve, specialmente poi rivolto alle coniche; e di esso i principii vi sono con tanta chiarezza dedotti dalle precedenti dottrine sulle intersezioni, da togliere ogni equivoco, nel quale furono anche indotti geometri distintissimi. E da questa trattazione potrà vedersi qual potere abbia la Geometria, quando siasene fatto studio conveniente.

40. A tutte le già dette dottrine abbiamo premessa quella della *similitudine*, e dell'*uguaglianza* delle curve coniche, la quale non fu tralasciata da Apollonio, e da altri geometri distinti, che de' *Conici*, si occuparono; e che omessa finora in altre istituzioni, obbligava talvolta, o a riscontrarla in qualche classico libro, o ad assumere come principii noti i caratteri per essa, quando occorreva farne uso.

41. Ma ancor queste dottrine veggonsi oltre i li-

miti già segnativi prodotte, e con nesso elementare esposte. E però questo libro IV del presente trattato può giudicarsi, per la più parte, nuovo nella scienza de' *Conici*, e di grande importanza nella medesima, per riescire in ricerche difficili che la riguardano, come non mancheremo d'indicare nelle *note* corrispondenti, in fine del volume, e'l comproveremo nelle applicazioni, che all'uopo ne verranno fatte. E riescirà certamente assai grato a' cultori della Geometria il vedere, come questa abbia saputo da se sola dischiudere i più reconditi penetrali delle più astruse ricerche sulle curve coniche, e con tanta facilità, ed eleganza, quanta dall' Analisi moderna non si otterrebbe; il che potrà servire a rendere accorto chi, non conoscendo le forze di quella, si è inconsideratamente indotto a giudicarne a suo modo, confermando così il canone logico di Giac. Bernoulli, che: *Errores hominum plerumque oriuntur, non tam ex eo quod male ratiocinentur, quam quod male judicent de rebus non evidenter perspectis.*

42. Qualche piccola modificazione ha pur ricevuto il libro V, che è compimento alle dottrine elementari de' primi tre, esponendovisi la *misura delle curve coniche, e de' solidi da esse generati*; ed abbiamo ancor cercato, per tali dottrine, stabilire la più stretta corrispondenza tra'l presente trattato, e l'altro delle *sezioni coniche analitiche* del nostro Fergola, in cui, allorchè si dovrà ristampare per la quarta volta, non tralasceremo di aggiugnere quan-

to bisogna per uniformarlo al presente trattato geometrico.

43. Le *note* poc'anzi accennate, non sono questa volta solamente dirette a rischiarare talune dottrine, o pur qualche punto storico che le riguardi: ma ancora ad estenderle, ove l'abbiamo creduto conveniente, ed aggiugnerne altre meno elementari; onde ne risultasse un trattato de' *Conici* lo più compiuto di quanti ve n'erano, e da non lasciar cosa alcuna a desiderare in argomento che ne dipenda.

44. L'andamento tenuto prova a bastanza, non pensar noi affatto, che ancor la Geometria stessa debba rimanersi stazionaria nell'insegnamento: essa dee ben seguire gli sviluppi ulteriori, che le menti acute de' suoi coltivatori le sapran dare; e laddove una qualche nuova dottrina possa riescire utile, profittarne rendendola elementare. Ma ciò non richiede, che si ripigli tutto da capo, e che si storpi il ben fatto, per inserirvi ogni nuova cosa, la quale, se anche voglia supporsi tanto importante, da non doverla trasandare negli *Elementi*, potrà o recarsi per supplimento in luogo opportuno, o serbarla in fine del trattato, o ancora apporla come lemma alla ricerca ove occorre. Questo sistema noi troviamo praticato da' nostri saggi maestri greci, che in esattezza, e rigore in ben istituire andarono assai più innanzi di noi. Certamente che Apollonio non tacciò di difetto il modo di esposizione tenuto negli *Elementi* Euclidei, perchè ebbe biso-

gno ne'suoi *Conici* di molte verità, che in quelli non rinvenivansi ; nè si diede a cambiarli da capo ; rispettandone l' ordine, il nesso , e 'l rigore ammirabile , che in altro modo difformandoli ben intendeva non poter conseguire. Egli al bisogno di nuove verità geometriche le assunse come lemmi ; e lo stesso fecero altri geometri greci, non escluso Euclide ne' suoi libri de' *Porismi* , come ben rilevasi dalle *Collezioni matematiche* di Pappo. Così pure si regolarono i geometri moderni, a'quali non mancava scienza, e giudizio ; e quest'ottima norma dee seguirsi da chi cerca produrre , a dì d' oggi libri elementari , per vantaggiare l' istituzione della gioventù. Laddove però quella strettezza di nesso elementare non si ravvisi , e così avviene, come di sopra è stato detto, degli Elementi de'*Conici*, ci abbiamo permesso l' inserimento di nuove verità, quando queste non si rimanevano senza applicazione negli Elementi stessi, e potevano simplificare qualche ricerca, o renderla più generale : che questa è la suprema legge imposta a chi compila opere di simil fatta.

45. Ci rimane ancora a dire alcuna cosa sull'insegnamento delle dottrine *coniche*, con qual metodo, cioè, esso debba venir fatto, mentre veggonsene già indicati due distinti nella precedente *Storia* (*n*.5.). Al qual proposito convien riflettere, che le dottrine de'*Conici* sono di pura Geometria, e fondamentali per una classe di problemi geometrici, e che formavano compimento d' istituzione in quella scienza

nelle scuole greche ; e però conviene ch' esse così pure si tramandino alla gioventù matematica a' tempi nostri. Sarebbe un gran male il darle ad intendere, cambiando metodo, che le forze di quella sieno imbecilli a discutere le proprietà di queste figure, ch'essa poi deve continuamente adoperare, del qual errore v' ha più d'uno, a' dì d'oggi, che si faccia vanto in profferirlo. Oltre di che, se gli artifizi di composizione de' problemi *solidi* non possono essere che geometrici ( e notisi che fin quì la scienza de' geometri moderni è giunta ) ; perchè interromperne il cammino nella ricerca delle proprietà di queste curve ? Ma vogliamo ancora , che si noti esser la scienza geometrica appresa negli *Elementi* assai ristretta , e limitata , da non poter dare alle menti de' principianti quello sviluppo, di cui hanno bisogno per consolidarsi nella Geometria ; e che vi occorre un continuo applicar delle verità in quelli apprese, ed in diverso modo combinarle, per iscoprirne altre, che ne guidino a nuove ricerche, principalmente usando delle evoluzioni di ragioni , e della similitudine de' triangoli ; nè potersi ciò meglio conseguire , che continuando l' istituzione geometrica nell' apprendere le dottrine de' *Conici* : le quali cose ben intende chi sia stato in questo modo educato nella Geometria , e sia avvezzo a così tramandarla a' giovani . E possiamo senza ritegno asserire , che l' incespicare, che or si ravvisa nella gioventù , ne' ragionamenti geometrici , sia in gran parte dovuto

ad averle fatto abbandonare le vie della Geometria, dopo averne appena delibati gli *Elementi*. Ed è per tal riguardo, che il dotto Torelli diceva, nella prefazione al suo Archimede: *Qui analysin statim amplectitur, quod plerumque fit, posthabita synthesi, aut neglecta, idem facit atque ille, qui labyrinthum sine filo ingreditur, ac se variis viarum flexibus implicat nullum exitum habituris.*

46. Dal fin qui detto, non dee però dedursi, che non debbasi la gioventù attuale ancor guidare per le vie, che ne offre il metodo indiretto, di cui è stato accennato nel *n*.33; dal quale combinamento essa non solo ricaverà il vantaggio d' istruirsi del modo di adoprare l' analisi algebrica nelle ricerche geometriche; ma ancora ne trarrà argomento in far riposare il suo animo su i risultamenti di questo efficacissimo metodo, che per mezzo di aritmetici sviluppi guida a conseguenze geometriche.

47. Questo è il sistema d' insegnamento sempre tenuto in istituir la gioventù nella nostra scuola, e mediante il quale sonosi, per ben settant' anni, avuti tutti que' distinti soggetti, che l' hanno sì ben sostenuta, ed ancor la sostengono; ed a' quali devesi la conservazione de' buoni studi geometrici, e quella buona piega, che veggonsi ora ripigliare anche altrove. Questa è la sicura via, che la ragione stessa ci addita, e che però raccomandiamo a' diligenti istitutori moderni. Nè seguendola i medesimi detrarranno alla brevità del corso d' insegnamento

geometrico, condizione, che non ben messa a calcolo, il rende ora difettoso; anzi la favorirà grandemente: poichè il cammino geometrico posato, e piano, rischiarerà, e preparerà la strada ad intendere quelle verità, che per altro sentiero apparentemente più breve vogliónsi percepire. Ed è cosa pur troppo nota la via più breve non esser già quella ove la lunghezza ne sembri più corta, ma bensì ove meno ostacoli ne attraversino il cammino: *Cum breve nihil dici debeat, quod sine explicatione aliqua intelligi nequit, et minus perspicue traditur*; così il testè citato Torelli.

48. Ed a questo proposito, per istabilire sempre più un'uniformità, e corrispondenza tra le dottrine sulle curve coniche, trattate con ciascuno de' due metodi; poichè il metodo inverso sopraddetto ha il vantaggio, includendole tutte in una stessa equazione, o formola generale, di mostrarne così evidentemente la loro uniformità di natura, a conseguire lo stesso scopo trattandole col metodo geometrico, abbiamo recato, in un'*appendice* a' primi tre libri, in cui le proprietà principali di tali curve espongonsi, un *prospetto* di corrispondenza delle proprietà stesse nelle curve diverse, dal quale ben rilevasi la loro uniformità di natura, o perchè quelle sono a dirittura le stesse, o perchè con leggiera modificazione, di semplice rapporto, può passarsi dall'una all'altra. In ciò, dobbiam dirlo, gode un vantaggio il metodo inverso. Ma d'altra parte inculchiamo a coloro, che di un tal

metodo si prevalgono in deciferar le proprietà di esse curve, di non tralasciarne alcuna delle importanti, che col metodo diretto veggonsi da noi esposte.

49. Del rimanente, noi non intendiamo, che di tutto questo trattato su' *Conici* debbasene fare una istituzione elementare; bastando per tale oggetto i primi tre libri, ed il quinto, da' quali potranno anche, gli accorti, e giudiziosi precettori, sottrarre un numero di proposizioni, che troveranno abbondanti pel loro oggetto. Abbiamo però voluto mostrare fin dove debba, al presente, giugnere la scienza de' *Conici*, per esser compiuta; e prepararci il materiale necessario pe' trattati dell' *invenzione geometrica*, e per le ricerche le quali saranno esposte negli *Opuscoli*, che dovremo pubblicare. Abbiamo ancora cercato porre in tutto il loro aspetto le forze di quella Geometria, per la quale, se fin dal passato secolo altamente dolevasi il Simson di vederla *inculta*, *et neglecta*, ond' è, che, a ridurla ad *pristinam* ακριβειαν *et perspicuitatem*, elaborò il suo dottissimo trattato delle *Sectiones conicae*, comparisse ora, che quel male ha prese più radici, ancor bastante in deciferare quelle affezioni di queste curve, che sembravano sol del dominio dell' Analisi sublime. E ripeteremo dopo ciò sempre, che questi due metodi debbono procedere a passi uguali nella buona istituzione geometrica, se vuolsi da essa ricavare tutto quel frutto, che ciascuno se ne promette, per confermar la mente all' invenzio-

ne, ed al discernimento de' metodi, che sono tutti della stessa importanza, quando sappiansi convenevolmente adoperare.

50. Finalmente dobbiamo protestarci con coloro cui verrà alle mani la presente edizione di questo trattato, che a malgrado la nostra grandissima attenzione in farlo riescire corretto; pure l'ignoranza crassa attuale de' nostri tipografi, e 'l poco amor proprio, ch' essi hanno per quest' arte distintissima, ed ancora le nostre distrazioni, e la debolezza degli occhi defatigati da lungo esercizio in correzioni di stampa, cui si è aggiunto pure L'altro gravissimo inconveniente di non aver talvolta avute presenti le figure ben disegnate, ha fatto scorrere nella stampa alcuni errori, de' quali daremo quì appresso corretti i principali.

## ERRATA, ED ADDIZIONI.

| Pag. | v. | Errata | Corrige |
|---|---|---|---|
| XIV | 9 | *feroidi* | *sferoidi* |
| XXI | 21 | Malvio | Milnio |
| XXXII | 33 | da | su |
| LXV | 22 | per tutte le curve coniche | della parabola |
| LXVI | | *Dopo* Nota, *si aggiunga* — e si riscontri ancora l'altra a' §§.196 e 316 | |
| 11 | 2 | AP | AT |
| 16 | | A dichiarare l'enunciazione delle prop .3.*par.*, 4.*ell.*, e 5 *iperb.* qui aggiugniamo, che il *quadrilineo corrispondente* al punto preso nel perimetro di una di tali curve vien costituito dal diametro, dalla tangente verticale, dall'ordinata per quel punto, e (nella parabola) dalla parallela al diametro tiratagli dal contatto laterale (nell'ellisse, o iperbole) dalla congiungente un tal contatto col centro. Che però in quella il quadrilineo risulta parallelogrammo, in queste trapezio. | |
| 48 | 2 | dalla | dalla curva, o dalla |
| 49 | 19 | GS | CS |
| | 29 | PDBA | PTBA |
| 52 | 8 | CD | GD |
| | 22 | [*fig. 6.*] | [*fig. 5.*] |
| 53 | 24 | La def. 3 deve esser 2, e così continuare in appresso per le altre. | |
| 55 | 4 | tangente | tangenti |
| | 7 | *tri* | *tiri* |
| | 15 | dal | del |
| 60 | 3-6 | Il *b corrispondente alla figura deve essere* B | |
| 70 | 12 | §. 83, *corr.* §. 84, *e si continui con aggiugnere* — e supplirvi ciò che dal §. 85 al 90 è ivi anche detto | |
| 106 | 19 | iscritto in | descritto tra |
| 109 | 15-16 | ai centri | al centro |
| 117 | 24-25 | de' detti semidiametri conjugati | co' semidiametri conjugati CA, CB |
| 119 | 17 | §§ 181 e 182 | §§. 179 e 181 |
| 156 | 14 | PR×RN | PR×PN |
| 163 | 23 | due | a due |
| 164 | 27 | RF | EF |
| 172 | 13 | (359) | (357) |
| 191 | 26 | sezione | sezione conica |
| 192 | | *Gli scolii di questo* §, *e degli altri 451, e 454 sono 1, 2, 3.* | |
| 195 | 24 | LG | *per maggior chiarezza si tenga presente la nota a p.192, ove dichiarasi il punto* L |
| 200 | 17 | EG — *soggiungasi* tangente in G | |
| 216 | *ult.* | o l'iperbole — *è superfluo* | |
| 221 | *ult.* | [*fig.64*] | [*fig.63*] |
| 222 | 23 | [*fig.65*] | [*fig.64*] |

## NOTE.

| Pag. | v. | | |
|---|---|---|---|
| VIII | v. ult. | i seguenti altri teoremi — | il seguente altro teorema |
| XVI | 23 | §. 00 | §. 105 |
| XVII | 4 | (§§. *123 e 126*), *ed alla prop. V.* — | *ed alla prop. V.* (§§. *125, e 126*) |
| XVIII | 10 | §§.116 | §§.155 |
| XX | 25 | *quadrilatero semplice* — | basta *quadrilatero* |
| XXI | 33 | *curva a centro* | *curva conica a centro* |
| XXIII | 31 | §. 232 | §. 252 |
| XXIV | 10 | 278 | 254 |

# INDICE

## DELLE PRINCIPALI MATERIE CONTENUTE NEL PRESENTE TRATTATO.

### *Storia delle sezioni coniche.*

*Aggiunzione alla precedente storia.*

PRENOZIONI SULLE CURVE CONICHE.



---

* *Queste note sono alla fine del volume .*

## Cap. II. — Delle tangenti, e seganti della parabola.

## Cap. II. — De' diametri conjugati dell' ellisse.

## Cap. III.—Delle tangenti , e seganti dell' ellisse.

lunque sua tangente; il loro rettangolo sarà sempre uguale al quadrato del semiasse minore. E 'l rettangolo de' rami tirati al contatto starà al quadrato della normale corrispondente, come l' asse maggiore al suo parametro. 196.

Nota, nella quale da questa proposizione, e dall' analoga per l' iperbole (316.) si rilevano le seguenti proprietà di tali curve, cioè, che:

*1. La normale per un punto qualunque, terminata all' asse de' fuochi, sta al semidiametro conjugato a quello, che passa pel punto medesimo, nel costante rapporto del semiasse secondario al primario.*

*2. I due segmenti di una normale qualunque, determinati da' due assi, a partir dal punto della curva, cui quella corrisponde, serbano tra loro un rapporto costante, uguale all' inverso de' quadrati de' semiassi rispettivi.*

*3. Il rapporto della normale, per un punto qualunque, terminata ad un asse, al semidiametro conjugato a quello che passa pel punto medesimo, è costante, ed uguale all' inverso di quello dell' asse stesso al suo conjugato.*

*4. Il rettangolo de' due segmenti di una normale qualunque, determinati da' due assi, è sempre uguale al quadrato del semidiometro conjugato a quello, che passa pel punto cui corrisponde la normale.*

*5. Se ad un punto qualunque di un' ellisse, o iperbole conducansi il ramo e la normale, e dall' incontro di questa con l' asse secondario si tiri la perpendicolare al ramo; questa ne troncherà, verso la curva, una parte uguale al semiasse primario.*

*6. La projezione della normale, terminata all' asse secondario su ciascuno de' raggi vettori, passanti pel punto cui corrisponde la normale, è uguale al semiasse primario.*

*7. La normale per un punto qualunque è media proporzionale tra i semiparametri dell' asse, e del diametro corrispondente a quel punto.*

E per la parabola può anche stabilirsi, che:

*La normale per un punto qualunque è media proporzionale tra' semiparametri dell' asse, e del diametro corrispondente a quel punto.*

*Nell' ellisse, ciascun ramo sta alla perpendicolare tirata dal suo estremo sulla linea di sublimità, nella costante ragione dell' eccentricità al semiasse — Ed esso ramo è pure uguale alla*

## Cap. II. — Degli assintoti delle iperboli.

## Cap. II. — Delle intersezioni delle curve coniche.

### *Del contatto di 3° ordine fra le sezioni coniche.*

*Del cerchio osculatore.*

# PRENOZIONI

SULLE

# CURVE CONICHE

1. Def. I. La retta ANM [*fig.* 1.], che passi per un qualunque punto A della circonferenza del cerchio AEC, e per un altro N posto in sublime, se mai aggirisi d' intorno a questo punto N, sempre rasente la detta circonferenza, e finchè compia un perfetto rivolgimento, dee descrivere una superficie curva, che *superficie conica* suol dirsi. E 'l solido terminato dal detto cerchio, e da quella parte della superficie conica, ch'è tra esso e l'immobile punto N si dice *cono*: di cui il medesimo cerchio n' è la *base*, e quell' immobile punto il *vertice*.

2. Cor. La retta NM parte dell' altra AM, e posta al di sopra del punto N, dee benanche descrivere una superficie conica nel proposto rivolgimento dell' intera retta AM.

3. Def. II. I due coni CNAE, MNR*e* diconsi *opposti fra loro*.

4. Def. III. L' *asse* del cono CNAE è la retta ND condotta dal vertice di esso al centro della base.

5. Def. IV. Ed un cono si dirà *retto*, o *scaleno*, secondo che il suo asse sia perpendicolare alla base, o vi s' inclini sotto un angolo qualunque.

## PROPOSIZIONE I.

### TEOREMA.

6. Se dal vertice del cono CNAE [*fig.* 2.] ad un qualunque punto F della superficie conica conducasi la retta NF; questa retta dovrà giacere sulla superficie proposta.

Dim. La retta rotante allorchè genera la superficie conica dee passare per tutti que' punti, che potremo concepire in detta superficie. Ella dunque dovrà passare pel punto F, che si è supposto essere in essa: e passandovi resterà adattata sulla FN. Ma la retta rotante è sempre sulla superficie conica: dunque quivi dovrà anche stare la retta FN, che congiunge il vertice N del cono col punto F della superficie di esso. — *C. B. D.*

7. Cor. La congiungente NF, se protraggasi giù del vertice del cono, dovrà incontrare la periferia della base in un punto E.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

8. Se i due punti F, G [*fig.* 2.] della superficie conica CNAE, i quali non sieno a diritto col vertice N del cono, si uniscano per mezzo della retta FG; questa retta dovrà immergersi nel cono.

Dim. Si uniscano le rette NF, NG, ed esse protraggansi all' in giù, finchè incontrino la periferia della base ne' punti E, A, e poi giungasi la retta EA.

Ciò posto, la retta EA, che unisce i due punti E, A della

periferia della base, cade dentro al circolo CEA (2.*III.*): dunque il triangolo ENA, che ha per base la EA, dovrà immergersi nel cono CNAE. Ma la congiungente FG giace nel piano di esso triangolo: dunque resterà ancor essa entro il cono CNAE. — *C. B. D.*

9. Cor. Una retta non può adattarsi nella superficie di un cono, se non combaci con un lato di questo solido.

## PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

10. Se il cono CNAE [*fig.* 2.] sia segato dal piano CPQA, che passi pel suo vertice; la sezione sarà un triangolo.

Dim. Il proposto piano incontri la circonferenza della base del cono ne' punti A, C. Egli è chiaro, che la retta rotante nel generar la superficie di tal cono abbia dovuto passare pel punto A, ch' è in essa, restando quivi distesa sul piano CPQA. Ma ella è benanche nella superficie conica. Dunque l' è una linea retta la comune sezione del piano segante, e di quella parte della superficie conica, ch' è verso A.

Con simil ragionamento si proverà essere una linea retta la comune sezione del piano segante, e dell' altra parte della superficie conica, ch' è verso C. Ed essendo benanche una retta l' intersezione del piano CPQA e della base del cono, cioè la linea CA (3.*El.XI.*); dovrà esser terminata dalle tre rette NA, NC, CA la parte del piano rinchiusa nel cono. Onde sarà un triangolo tal sezione — *C. B. D.*

11. Def. v. Se il piano segante condotto per lo vertice del cono passi anche pel di lui asse; la sezione si dirà *triangolo per l' asse*

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

12. Se il cono CNAE [*fig*. 3.] seghisi col piano LGR parallelo alla sua base; la sezione sarà un cerchio.

Dim. Si prendano due punti G, R nel perimetro di siffatta sezione, ed uniscansi col vertice N per mezzo delle rette NG, NR, che protratte all' ingiù dovranno incontrare la periferia (6.) della base ne'punti E, A. Di poi congiunto l'asse ND, si tirino dal punto ov' ei incontri il piano segante, a' punti R, G, le rette FR, FG; e dall'altro punto D, ai punti A, E, si conducan pure le rette DA, DE.

E poichè il triangolo DNA sega i piani paralleli CEA, LGR, saranno tra se parallele le comuni sezioni DA, FR (16. *XI.*); onde il triangolo NDA, perchè equiangolo all'altro NFR gli sarà simile, e starà ND : NF :: DA : FR. Per la medesima ragione si proverà essere ND : NF :: DE : FG. Dunque sarà DA : FR :: DE : FG. Ma la retta DA è uguale alla DE, essendo esse raggi della base del cono; adunque sarà benanche la FR uguale alla FG. E dimostrando nello stesso modo, che sia uguale alla FR ogni retta, che dal punto F si tiri al perimetro della sezione LGR, questa curva sarà cerchio, di cui il punto F n' è il centro. — *C. B. D.*

13. Cor. 1. Tutte le sezioni parallele alla base di un cono sono altrettanti cerchi, i cui centri sono allogati nell'asse di tal solido.

14. Cor. 2. E l' intersezione di ciascheduno di questi cerchi con un triangolo per l'asse, è un diametro di esso.

15. Cor. 3. Che se un piano parallelo alla base del cono CNAE [*fig*. 1.] non incontri la superficie di questo solido, ma bensì l' altra MNR*e*, che l' è opposta al vertice, con un simile raziocinio si proverà essere un cerchio cotesta sezione, e quindi un cono il solido MNRe (1. e 2.)

### PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

16. Se per l' asse, e per l' altezza del cono scaleno CNAM [*fig.* 4.] conducasi il triangolo CNA, e su questo piano cada perpendicolarmente l' altro FER, incontrandolo nella retta FR, la quale tronchi verso il vertice del cono il triangolo FNR simile al detto CNA, e succontrariamente posto (cioè che sieno gli angoli NFR, NRF uguali ad NAC, NCA, l' uno all'altro); anche la sezione FER, che suol dirsi *succontraria*, sarà cerchio.

Dim. Prendasi nel perimetro di questa sezione il punto E, e l'altro M nella periferia della base del cono, e da essi conducansi le EI, MD perpendicolari al piano CNA. Queste rette saranno parallele fra loro (6. *El XI.*), e dovranno cadere sulle FR, CA respettivamente (38. *El. XI.*). Inoltre condotta per lo punto I la retta GIB parallela alla CA base del triangolo per l' asse, si distenda per le due rette EI, GB il piano GEB, che sarà parallelo al piano CMA (15. *XI.*), e sarà quindi un cerchio la sezione GEB (*pr. prec.*), di cui la GB n' è un diametro.

Ciò posto, l' angolo esterno FGI delle parallele GI, CD segate dalla terza FC è uguale all' interno ed opposto GCA. Ma l' angolo GCA è per ipotesi uguale a BRI. L' è dunque FGI uguale a BRI. Con che i due triangoli FGI, IBR, avendo ancora uguali gli angoli GIF, BIR opposti al vertice, saranno simili; e starà GI : IF :: IR : IB. Onde il rettangolo di GI in IB sarà uguale a quello di IF in IR. Ma il rettangolo di GI in IB pareggia il quadrato della retta EI tirata nel semicerchio perpendicolare al suo diametro GB (53. *III*).

L' è dnnque anche l' altro rettangolo di FI in IR uguale al medesimo quadrato di EI. Inoltre la FR si divida in parti ugnali nel punto O, si unisca la OE, ed agginngasi OI' tanto ad FIR, che ad EI'; n' emergerà RO' uguale ad OE'; e quindi RO nguale ad OE. Lo che potendo sempre dimostrarsi per qualunque punto della sezione FER, sarà essa un cerchio. — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

17. Se nella base CTA [*fig*.5.] del cono CNAD conducasi la corda TPD perpendicolare alla CA base del triangolo CNA per l' asse, e per tal corda poi si distenda il piano TQD comunque inclinato alla base del cono, e che non passi per lo vertice N di esso, un tal piano formerà nel cono una sezione curvilinea.

Ed in questa sezione ogni corda ERS, che sia parallela a quella corda della base del cono, cioè alla TD, resterà divisa in parti uguali dal detto triangolo per l' asse.

Part. 1. Prendansi nel perimetro della proposta sezione due qualunque punti T, *c*, comunque tra loro vicini: e poi si congiunga la T *c*. Questa retta non dovrà passare per lo vertice del cono, altrimenti vi passerebbe benanche il piano TQD, contro la supposizione: ond'ella dovrà cadere entro il cono CNAD. Ma la parte TH *c* del perimetro di quella sezione è sulla superficie conica, e vi tiene i medesimi termini della retta T *c*. Dunque la linea TH *c* dee essere un arco sotteso dalla T *c*; e quindi sarà una figura curvilinea la proposta sezione.

Part. II. Per lo punto R, ove la retta ES incontra il piano CNA, si tiri la GRB parallela alla CA, e si distenda per la ES, GB il piano GEBS (2.*El.XI.*), che sarà parallelo alla base del cono (15.*El.XI.*), e quindi un cerchio la sezione GEB (11.), di cui n' è GB un diametro, e la sua circonferenza, come l'è di per se chiaro, passerà pe' punti E, S.

Ciò posto, le due rette TP, PA essendo respettivamente parallele ad RE, RB, sarà l'angolo TPA uguale ad ERB (10.*XI.*). E quindi essendo il primo per supposizione retto, sarà retto benanche l'altro ERB. Dunque il diametro GB del circolo GEB tagliando ad angoli retti la corda ES dovrà segarla in parti uguali in R (3.*III.*). E quindi la ES, ch' è anche corda della curva TQD, resterà divisa per metà nell' incontrare il triangolo ANC per l'asse, o la retta PQ ch' è in esso, e nel piano segante TQD. — *C.B.D.*

18. Cor. Dalla dimostrazione della prima parte del precedente teorema è facile rilevare, che: *la congiungente due punti presi nel perimetro di una sezione conica cada dentro di essa; nè possa incontrarla in altro punto.*

19. Def. VI. La comune sezione di una curva conica, e di quel triangolo per l' asse, ch' è bisognato per la genesi di essa, cioè la retta PQ[*fig.*5.], si dice *diametro di una tal curva*. E *le sue ordinate* sono quelle corde tra loro parallele, ch'ei divide in due parti uguali.

20. Def. VII. Inoltre ciascuna metà di un' ordinata dee dirsi *semiordinata*. E quando diremo *si ordini al diametro una retta per un dato punto*, vuol intendersi, che per quel punto debba distendersi un' ordinata alla curva, o una semiordinata. Finalmente il *vertice di una sezione conica* è quel

punto , ove il diametro di essa l' incontra ; come sarebbe nella *fig.* 5 il punto Q.

21. DEF. VIII. L' *asse di una sezione conica* è il diametro , che insiste ad angoli retti alle sue ordinate.

22. DEF. IX. La parte del diametro ch' è tra 'l vertice della sezione , ed una di lei ordinata , suol chiamarsi *ascissa* corrispondente ad essa ordinata. E l' ascissa, e la sua semiordinata considerate insieme chiamansi *coordinate*.

Così le rette QR,Q*r* [*fig.5.*] sono le ascisse corrispondenti alle semiordinate RS , *rs* : e le due QR , RS ne sono le coordinate .

23. COR. Se pel punto medio di un' ordinata di una curva conica , si distenda nel triangolo per l' asse la parallela alla base di esso : *il rettangolo delle parti di questa parallela , che restano dall' una e dall' altra parte di quel punto , sarà uguale al quadrato della metà della detta ordinata* . Cioè a dire sarà il rettangolo di GR in RB uguale ad RE² .

24. DEF. X. La sezione TAD [*fig.*5.] si dirà *parabola* , se il suo diametro QP sia parallelo a quel lato del triangolo per l' asse , ch' è opposto a tal sezione, cioè al lato NC.

25. DEF. XI. E si chiamerà *ellisse* [*fig.*6.] quella sezione conica , il cui diametro incontri sotto al vertice del cono quel lato opposto del triangolo per l' asse , qual sarebbe la curva QELD.

26. Ma questa potrebb' essere cerchio , se il cono fosse scaleno, e quivi *succontraria* (16.) la detta sezione. E tranne questo caso , una tal sezione , che torna in se stessa , è diversa dal cerchio.

27. Def. xii. Finalmente si dirà *iperbole* [*fig*. 7.] la sezione DQT, se 'l suo diametro QP incontri sopra del vertice del cono il lato opposto del detto triangolo per l' asse. E se il piano segante DQT producasi insino al cono opposto FNL, ei formerà in questo cono un' altra iperbole ML*r*. E le due iperboli DQT, ML*r* si diranno *sezioni opposte*.

28. Cor. Tanto nell' ellisse, che nelle iperboli opposte contengonsi due vertici, cioè i punti Q, L.

29. Def. xiii. La retta QL [*fig*. 6. e 7.], che unisce i due vertici Q, L dell' ellisse QELD, o delle sezioni opposte DQT, ML*r*, dicevasi *lato trasverso* da' geometri antichi*.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

30. Se da qualunque punto M [*fig*. 8.] del diametro QP di una curva conica gli si elevi la perpendicolare MT, terza proporzionale in ordine all' ascissa QM, ed alla semiordinata MN, che corrispondono al detto punto; l'estremo di quella perpendicolare starà sempre in una retta data di posizione [1], che si dirà *regolatrice*.

Dim. Da un qualunque altro punto *m* del diametro QP ti-

---

* Vedi il §. 15. *Storia delle Sez. Con.*

[1] Una retta è data di posizione, se mai passi per due punti dati. E questi due punti sarebber nel nostro caso i due estremi di coteste perpendicolari.

risi la $mt$ perpendicolare alla $mt$, e terza proporzionale dopo le coordinate $Qm$, $mn$. E poichè il quadrato di NM, per ipotesi, è uguale al rettangolo QMT, ed ei fu dimostrato benanche uguale all' altro rettangolo RMB (23.); saranno tra se uguali cotesti due rettangoli, e reciprocandosi le loro basi ed altezze starà QM : MB :: RM : MT ; ed in simil modo si dimostra dover essere $Qm : mb :: rm : mt$. Ma sono uguali le due prime ragioni di queste due analogie, cioè quelle di QM ad MB, e di $Qm$ ad $mb$, pe' triangoli simili QMB, $Qmb$. Dunque saran pure uguali le altre due ragioni : cioè a dire dovrà essere RM : MT :: $rm : mt$; e permutando RM : $rm$ :: MT : $mt$. Ciò posto, nell' ellisse, e nell' iperbole [*fig.8. n.2 e 3.*], ove il diametro di ciascuna di queste sezioni incontra in P il lato opposto del triangolo per l' asse, sta RM : $rm$ :: PM : P $m$. Dunque dovrà esser benanche PM : P$m$ :: MT : $mt$. Ed i punti T, $t$ saranno allogati nella retta PT data di posizione, che passa pe' punti P, T.

Ma nella parabola la RM [ *fig 8.n.1.*] è uguale alla $rm$, per esser parallele le due rette QP, R$r$ (24.). Onde dovrà essere la MT uguale alla $mt$; e quindi i due punti T, $t$, dovranno giacere in una parallela alla PQ data di posizione. — *C. B. D.* *

31. Cor. Dunque la *regolatrice* nella parabola è parallela al diametro di essa. Ed in ciascheduna delle altre due sezioni ella incontra il diametro nell' altro vertice P, ch' è opposto a quello, di dove abbiam computate le ascisse.

32. Def. xiv. *Parametro* di una sezione conica dicesi la perpendicolare QA elevata al diametro dal

* Questa nuova proprietà delle curve coniche, nuovamente ravvisata nell' idea della *regolatrice*, non solamente si appartiene alla parabola, all' ellisse, ed all' iperbole, ma benanche al cerchio, ed al triangolo. Ed ella potrebbesi generalmente enunciare nel seguente modo. *Ciascuna semiordinata di una qualunque sezione conica è media proporzionale tra le coordinate di una retta data di posizione.*

vertice Q della sezione, e distesa insino alla *regolatrice* AP. Questo parametro dicevasi *lato retto* da' geometri greci *.

33. Scol. Dal proposto teorema, che manca nelle altre istituzioni, potremo ritrarre i seguenti vantaggi didascalici. I. Con una medesima agevolissima nozione verranno definiti non solo i parametri de' diametri primitivi delle tre curve coniche, ma que' parametri altresì, che vi si avranno poi a considerare. II. Da questo teorema dovranno discendere immediatamente le proprietà caratteristiche delle dette curve. III. E da esso potrem dedurre una proprietà generale di queste curve, ed è, che: *Ogni semiordinata sia media proporzionale tra l'ascissa computata dall' un vertice della sezione, e la corrispondente ordinata alla regolatrice, che passi per l' altro vertice.* Intanto vuol sapersi, che quest' ordinata non è che la perpendicolare elevata alla detta ascissa dall'estremo di essa, e prodotta sino alla regolatrice. E dee avvertirsi, che nella parabola cotesta regolatrice debb' essere parallela al diametro.

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA (a).

34. Una linea retta tirata nel piano di una curva conica non può incontrarla in più di due punti.

Dim. Imperocchè sia la retta ES [*fig*.9.] segnata nel piano che ha prodotta la curva TQD nella superficie conica CDAN: è chiaro che l' altro piano condotto per la ES e pel vertice N del cono segnerà in tal superficie due suoi lati NE, NS, e che gl' incontri della ES con tal superficie, e quindi

* Vedi il §. 15 *Storia delle Sez. Con.*

con la curva TQD in essa segnata, non possono essere che que' soli punti ne' quali la ES intersega le NE, NS.

35. Cor. 1. Nella parabola TQD [ *fig 5.* ], il piano che passa pel diametro QP, e'l vertice N essendo il triangolo per l' asse CNA, al cui lato NC è parallela la QP; si vede però che questa non possa incontrare che nel solo punto Q la superficie conica, e quindi la curva TQD. E però che i due rami di questa debbano continuamente divergere dal diametro QP.

Lo stesso per qualunque altra parallela alla QP, condotta nel piano di tal curva.

36. Cor. 2. E nell' iperbole DQT [*fig.*7.] il piano pel diametro QP, e pel vertice N, essendo pure il triangolo per l' asse, si vede che la QP non possa incontrare la superficie conica ADCN, ma sì bene quella del cono opposto LNF: e quindi che il diametro QP dell' una iperbole debba divergere continuamente da'suoi rami, ed andare ad incontrare l' iperbole opposta ML$r$, divergendo ancora da' rami di questa.

37. Scol. La proprietà delle tre curve coniche per l'intersezione con una retta, che si è quì dedotta dalla semplicissima loro genesi per sezione, e che da Euclide fu dimostrata pel cerchio, ed appartiensi ancora al triangolo per ogni due lati, è fondamentale per la loro natura, e per le proprietà di esse; e però conveniva assolutamente premetterla alle ricerche particolari sulle medesime, che dovremo esporre ne' seguenti libri.

DELLE

# SEZIONI CONICHE

## LIBRO PRIMO.

## DELLA PARABOLA.

### CAPITOLO I.

DE' DIAMETRI DELLA PARABOLA.

#### PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

38. Nella parabola NQB [*fig.* 10], il quadrato di una qualunque semiordinata NM, è uguale al rettangolo del parametro AQ nell' ascissa QM, che corrisponde alla detta semiordinata.

Ed i quadrati di due qualunque semiordinate NM, *nm* sono proporzionali alle loro corrispondenti ascisse QM, Q*m*.

Dim. Part. 1. In qualunque sezione conica il quadrato della semiordinata NM pareggia il rettangolo della sua ascissa QM nella MT, che si eleva dal punto M perpendicolarmente alla detta ascissa, e si distende insino alla regolatrice AP (30.). Ma nella parabola cotesta regolatrice è parallela al diametro QM, onde la detta perpendicolare dee uguagliare il parametro QA. Dunque sarà $NM^2$ uguale al rettangolo di QM in QA.

Part. II. Ed essendo i due rettangoli di QM in QA, e di Q*m* in QA, per avere la medesima altezza QA, nella ragione delle loro basi QM, Q*m*; anche i quadrati delle semiordinate NM, *nm*, che si sono dimostrati pareggiare que' due rettangoli respettivamente, dovranno essere nella ragion delle QM, Q*m*, cioè come le loro corrispondenti ascisse.— *C.B.D.*

39. Cor. Nella parabola al crescer delle ascisse crescon benanche le loro sottoposte ordinate; sebbene sian queste non già nella ragion di quelle, ma nella sudduplicata. Dunque l'è forza, che i rami curvilinei di una tal curva divergano continuamente fra loro, e dal diametro ch'è in mezzo ad essi. E lo stesso dee dirsi di ogni parallela al diametro condottagli entro l'anzidetta sezione [1].

40. Def. I. La *tangente* di una sezione conica è quella retta, che in un sol punto incontra una tal curva, e ne ha fuori di questa tutti gli altri suoi punti.

*Cotesta tangente si dirà poi* verticale, *o* laterale, *secondo che l'avrem condotta dal vertice della sezione, o in un altro qualunque punto del perimetro di essa* [2].

## PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

41. Nella parabola, se l'ascissa AM [*fig.* 11.], che corrisponde all'ordinata NG, producasi al di sopra del vertice A, sinchè la parte prodotta AP adegui la medesima ascissa: dico esser tangenti di

---

[1] Ciò si era già rilevato nel §. 35.

[2] Questa definizione nell'adattarsi alle curve di un grado più elevato ha bisogno di alcune limitazioni.

tal curva le due rette, che uniscono l'estremo P di quella parte protratta con ciascun estremo della detta ordinata.

E l'angolo mistilineo ANP, compreso dalla parabola e dalla tangente, non potrà mai dividersi per una retta.

Dim. Part. 1. Nella retta PR prendasi ove ne piaccia il punto R, e da esso si conduca la BR parallela alla NM, incontrando la parabola in T. Sarà BR : NM :: PR : PM, a cagion de' triangoli simili BPR, NPM; e quindi $BR^2 : NM^2 :: PR^2 : PM^2$. Ma per la natura della parabola NAG, sta $NM^2$ a $TR^2$ come AM ad AR (38.), o come il rettangolo di MA in 4AP all'altro di RA in 4AP (1.*El.VI.*). Laonde sarà, *ex aequo*, $BR^2 : TR^2 :: RP^2 : RA \times 4AP$ (22.*El.V.*). Ma l'è poi $RP^2$ maggiore del rettangolo di RA in 4AP (8.*El.II.*). Adunque sarà $BR^2$ maggiore di $TR^2$; e quindi BR maggiore di TR, e 'l punto B dovrà cadere fuori della curva NAG. E dimostrando in simil modo, che ogni altro punto della PB, tranne il solo N, stia fuori della detta curva, la PB sarà tangente della parabola NAG (40.). E lo stesso varrebbe per l'altra retta, che unisce i punti P, G.

Part. ii. S'è possibile, la retta N$p$ divida l'angolo ANP del contatto; ed ella incontri la PA in un punto $p$ sottoposto all'altro P. In tal supposizione tolgasi dal diametro AB l'ascissa A$m$ uguale alla $p$A, ed ordinatavi per $m$ la $mn$, si unisca la retta $pn$. La congiunta $pn$, *per la parte 1. di questo teorema*, sarà tangente della parabola in $n$; e prodotta all'in giù, non potendo cadere entro la curva, dovrà necessariamente incontrare la NP, e molto più la N$p$. Dunque le due rette N$p$, $np$ dovranno segarsi in due punti. Lo che ripugna. — *C. B. D.*

42. Cor. 1. In questo teorema contiensi quel geometrico ar-

tificio, che convien usare nel condurre la tangente per un punto della parabola, il qual non sia il vertice della detta sezione.

43. Cor. 2. E se voglia condursi la tangente alla parabola nel vertice di tal curva, basterà menare per esso la parallela ad una sottoposta ordinata. Imperocchè, se mai tal retta suppongasi cadere dentro alla curva; ella ne sarà un' ordinata. E 'l diametro che dovrebbe passare per lo punto medio di essa, quì passerebbe per un suo estremo; ch' è assurdo.

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

44. Se da qualunque punto C [*fig.* 12.] della parabola AQC si tirino le due rette CB, CN, l' una parallela alla tangente verticale AP, l' altra alla laterale QS, ed esse protraggansi finchè incontrino in B, N il diametro AB della sezione; il triangolo CBN formato da quelle rette uguaglierà il parallelogrammo PTBA corrispondente al detto punto.

Dim. I due triangoli QMS, CBN hanno coincidenti i lati SM, NR, e gli altri lati di essi, come ne appare, sono respettivamente paralleli tra loro. Dunque essi saranno equiangoli, e quindi simili, e però in duplicata ragione de' loro lati omologhi (19. *El. VI.*). Vale a dire starà QMS : CBN :: $MQ^2$ : $BC^2$. Ma per la natura della parabola sta $MQ^2$ : $BC^2$ :: MA : BA (38.) :: MAPQ : BAPT (1. *El. VI.*). Dunque sarà pure QMS : CBN :: MAPQ : BAPT. Ma il triagolo QMS adegua il parallelogrammo MAPQ; poichè queste due figure sono fra le medesime parallele MS, PQ, e la prima di esse ha una doppia base dell' altra, essendo la MS doppia di MA (41.). Dunque sarà benanche il triangolo CBN uguale al parallelogrammo PTBA. — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

45. La retta QD [*fig.* 13.] , che da un qualunque punto Q del perimetro parabolico AQC conducasi parallela al diametro AB di una tal sezione , divide in due parti uguali ciascuna delle corde AC, FH, *ec.*, che sono parallele alla tangente nel detto punto Q. Onde tal retta ne sarà un altro diametro, che ha le dette corde per ordinate.

Dim. Cas. 1. La corda AC incontri il diametro AB della sezione nel vertice A ; e per lo punto C , ch' è l' estremo inferiore di essa corda , si ordini la CB al detto diametro . Sarà il triangolo CAB uguale al parallelogrammo BAPD (*prop. prec.*) . Dunque tolto da essi il comune trapezio DLAB , dovrà restare il triangolo CDL uguale all' altro APL . Ma questi triangoli sono anche simili : dunque dovranno pareggiarsi i loro lati omologhi CL , LA ; onde la QM divide in parti uguali la corda AC nel punto L.

Cas. 2. In oltre la corda HF incontri il diametro AB della sezione nel punto O sotto il vertice di essa . Da' suoi estremi F , H si conducano le ordinate FE,HK al detto diametro AB. Sarà , il triangolo FEO uguale al parallelogrammo EAPG (*prop.prec.*) . Dunque aggiungendovi di comune il parallelogrammo KEGM , risulterà lo spazio FGMKO uguale al parallelogrammo KAPM , o al triangolo OKH , che gli è uguale (44.). Il perchè, se dagli uguali spazi OKH, FGMKO torremo il comune trapezio MNOK , rimarrà il triangolo HMN uguale al suo simile FGN . Dunque i loro lati omologhi FN , HN saranno uguali , e la corda FH sarà divisa in due parti uguali dalla QM.

Cas. 3. Finalmente la corda EC [*fig.* 12.] incontri il dia-

metro AB della sezione nel punto N oltre il vertice di essa. Sarà chiaro, che condotte al diametro AB le ordinate CB, ED da' termini di essa corda, debbano essere i triangoli CBN, EDN respettivamente uguali a' parallelogrammi BAPT, DAPR (*prop.prec.*). Dunque sarà il trapezio CEDB, differenza di que' triangoli, uguale al parallelogrammo TBDR, differenza di questi parallelogrammi. E quindi togliendo da queste grandezze uguali il comune pentagono TLEDB, rimarrà il triangolo CTL uguale al suo simile LRE. E dovendo essere uguali i lati omologhi CL, LE di essi triangoli, la QT dovrà dividere per metà la corda EC. Dunque la QM [*fig. 13.*] può aversi per un altro diametro della parabola, avente per sue ordinate le corde AC, FH, parallele alla QS tangente di tal curva in Q. — *C. B. D.*

46. Cor. 1. La parabola è suscettiva d'infiniti diametri, che vi saranno condotti da ciascun punto di tal curva paralleli al *diametro primitivo*, cioè *a quello, che vien dalla genesi di essa esibito.*

47. Cor. 2. Nella parabola i punti medii della corde parallele ad una tangente di essa, e 'l contatto di questa retta sono posti per dritto, e trovansi allogati in una parallela al diametro primitivo. Dunque una retta, che unisca due di questi punti, o che conducasi per uno di essi parallela al diametro primitivo, dovrà passare pe' rimanenti.

48. Cor. 3. E perciò la retta, che congiunge i punti medii di due corde parallele, sarà un diametro della curva. Ed una corda perpendicolare a quella congiungente sarà un'ordinata all'asse. Ond' *ci si potrà esibire col solo condurre dal punto medio di quest'ordinata la parallela all' anzidetta congiungente.*

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

49. I quadrati delle semiordinate CL, HN [*f.* 13.], o delle intere ordinate al diametro QM, sono proporzionali alle loro corrispondenti ascisse QL, QN.

Dim. La retta QP, a cagione del parallelogrammo QPAX, adegua l' altra AX; ed è poi la retta SA uguale alla medesima AX (*prop.* 2.): dunque saranno uguali le due QP, AS; ed i triangoli QZP, AZS dovranno pareggiarsi (26. *El. I.*). Il perchè, aggiungendo a' detti triangoli il sottoposto pentagono DQZAB, risulterà il parallelogrammo DPAB uguale al trapezio SQDB. Ma un tal parallelogrammo si è dimostrato uguale al corrispondente triangolo ACB. Dunque sarà il trapezio SQDB uguale al triangolo ACB: e tolto da essi il comune spazio DLAB; dovrà essere il triangolo LCD uguale al parallelogrammo LQSA.

In simil modo può dimostrarsi, che sia il triangolo HNM uguale al parallelogrammo NQSO. Dunque i due triangoli LCD, NHM saranno proporzionali a' parallelogrammi LQSA, NQSO. Ma que' triangoli, avvegnacchè simili, sono come i quadrati de' loro lati omologhi CL, HN; e questi parallelogrammi, per avere la medesima altezza sono proporzionali alle loro basi QL, QN. Laonde sarà $CL^2 : HN^2 :: QL : QN$; cioè i quadrati delle semiordinate del diametro QM, e con ciò quelli delle intere ordinate sono come le corrispondenti loro ascisse. — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

50. Nella parabola QFA [*fig.* 14.], se da un

qualunque punto L del diameto QN gli si elevi la perpendicolare LI terza proporzionale dopo l' ascissa LQ, e la semiordinata LA, corrispondenti a detto punto; l' estremo I di tal perpendicolare sarà allogato in una parallela al detto diametro data di posizione.

*Questa retta si dirà benanche* regolatrice.

Dim. Un' altra retta NY anche perpendicolare al diametro QN in un altro punto N sia terza proporzionale dopo le coordinate QN, NF. Saranno i quadrati delle LA, NF respettivamente uguali a'rettangoli di QL in LI, e di QN in NY. Ma quei quadrati sono proporzionali alle ascisse QL, QN. Dunque saranno i rettangoli di QL in LI, di QN in NY, come le loro basi QL, QN: ond'essi dovranno avere uguali le altezze LI, NY; ed i punti I, Y dovranno trovarsi in una parallela alla QN. — *C. B. D.*

51. Def. ii. La perpendicolare, che si eleva ad un qualunque diametro della parabola, dal vertice di esso, e si distende insino alla regolatrice, si dirà *parametro* di tal diametro. E si chiamerà *parametro principale* quello che all' asse appartiene.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

52. Il quadrato di ciascuna semiordinata ad un qualunque diametro della parabola è uguale al rettangolo della sua ascissa nel parametro.

La dimostrazione di questo teorema traluce in quella del precedente, e nell' addotta definizione.

53. Cor. 1. Questa proprietà della parabola, che nella prop. I. erasi proposta per lo diametro primitivo di una tal curva, quì scorgesi universalizzata per tutt' i diametri [4]. Ed in conseguenza di un tal principio potrà stabilirsi fra le altre cose la verità seguente.

54. Cor. 2. *Se l' ascissa corrispondente ad un' ordinata di qualunque diametro, si protragga fuori la curva, finchè la parte protratta pareggi quell' ascissa; saranno tangenti essa curva le rette, che uniscano l' estremo della parte protratta con ciascun estremo della detta ordinata.* Ma il teorema converso sarà esibito nella prop. IX.

55. Cor. 3. Il parametro di ciascun diametro della parabola potrebbesi definire esser *la terza proporzionale in ordine ad un' ascissa, che vi si prenda, ed alla semiordinata corrispondente.*

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

56. Nella parabola MAO [*fig.* 15.] il parametro di qualunque diametro MG supera quello dell' asse AT per lo quadruplo dell' ascissa AN, che vi determina nell' asse l' ordinata condottagli dal vertice di quel diametro.

[4] Questa verità che suol condurci per un sentiero di luce, quando geometricamente si rilevi, diventa di malagevol conseguimento nel volerla per le vie analitiche ricercare. Imperocchè a tal uopo ne abbisognerebbe il passaggio da un sistema di coordinate oblique ad un altro di coordinate anche oblique, che arrestò i passi all' Eulero. E se vogliasi agevolare un tal passaggio col supporre con alcuni analisti, che il diametro sia l' asse della parabola, e retto il cono, d' onde si generi questa curva, si renderà molto particolare cotesta ipotesi, e poco decente all' Analisi moderna.

Dim. Al punto M della proposta parabola conducasi la tangente DM (42.), la quale incontri l' asse nel punto D. Sarà la DA uguale alla AN. Imperocchè, se ciò si neghi, si prenda nella AD l'altra A*d* uguale alla AN. La congiunta M*d* sarebbe tangente della parabola nell' istesso punto M (36.), dividendo l' angolo AMD del contatto, ch' è un assurdo. Quindi è, che menata per lo punto A la retta AR parallela alla tangente MD, debba essere la MR uguale alla AN, essendo amendue uguali alla DA.

Ciò posto, per la natura di tal curva, il quadrato di MN adegua il rettangolo di AN, o della sua uguale MR in AP, che sia il parametro dell'asse (52). E per la prop. 4: *El. II.* il quadrato di DN, ch' è quadruplo di quello di AN, è uguale al rettangolo di MR in 4AN. Adunque il quadrato di MD, che uguaglia que' due quadrati, sarà uguale a' due rettangoli di MR in AP, e di MR in 4AN, cioè al solo rettangolo di MR in AP + 4AN. Ma il quadrato di AR semiordinata al diametro MG è uguale al rettangolo della sua ascissa MR nel parametro MQ. Dunque essendo uguali i quadrati delle MD, AR, saranno anche uguali i rettangoli, che ad essi abbiamo dimostrati uguali, cioè di MR in AP + 4AN, e di MR in MQ. Onde dovrà essere AP + 4AN uguale ad MQ. — *C. B. D.*

57. Cor. Nella parabola il minimo parametro è quello, che conviensi all' asse. E due diametri, i cui vèrtici sieno equidistanti dall' asse, dovranno avere parametri uguali.

58. Def. iii. Se un diametro della parabola si produca oltre il vertice, finchè incontri una tangente di tal curva, si chiamerà *sottangente* la parte del diametro, che resta tra quell' incontro, e l' ordinata per lo contatto.

59. Def. iv. La perpendicolare MQ [*fig.* 16.] ad una tangente, MD nel punto M del contatto, prodotta insino all'asse AQ, si dice *normale*; e si dirà

*sunnormale* quella parte dell' asse, che tramezza la detta normale, e l' ordinata condottagli per lo contatto, cioè la NQ.

### PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

60. Nella parabola la sottangente, qualunque sia il diametro, ove la prendiamo, è sempre doppia dell' ascissa, che corrisponde all' ordinata per lo contatto.

E la sunnormale, che ha luogo nel solo asse, è metà del parametro principale.

Dim. Part. i. Sia QM [*fig.13.*] un qualunque diametro della parabola FAQH, ed una tangente AP di questa curva lo incontri di P. Per lo punto A del contatto di tal retta, si tiri AL parallela a QZ tangente della parabola in Q: dico dover esser la sottangente PL doppia dell' ascissa QL.

La dimostrazione di questa verità può farsi come quella, ch' è nel principio della precedente dimostrazione.

Part. ii. Sia NQ [*fig. 16.*] una sunnormale della parabola MAO, sarà il quadrato di MN, a cagione dell' angolo retto QMD, uguale al rettangolo di QN in ND. Ma lo stesso quadrato di MN è anche uguale al rettangolo di NA nel parametro AP, per la natura della parabola. Dunque saranno ugnali i due rettangoli di QN in ND, e di NA in AP. Onde dovrà stare NA : ND :: QN : AP. Ma l' ascissa NA è metà della sottangente ND (*part. 1.*). Dunque sarà benanche la sunnormale QN metà del parametro principale AP. — *C. B. D.*

## CAPITOLO II.

### Delle tangenti, e seganti della parabola.

### PROPOSIZIONE X.

#### PROBLEMA.

61. Dato il punto P [*fig.*17.] fuori la parabola ABC, condurle da esso la tangente.

Costruz. Dal dato punto P si tiri la PL parallela al diametro primitivo BD della parabola ABC. Dovrà quella retta incontrar questa curva. Poichè condotta per lo punto P la PV parallela alle ordinate del diametro BD, ed insin che lo incontri, vi si tolga l'ascissa BY terza proporzionale in ordine al parametro del detto diametro, ed alla PV, e si ordini la QY. Sarà chiaro esser questa retta parallela alla PV; e le sarà benanche uguale, per esser QY media proporzionale tra 'l parametro anzidetto e la BY, al par della PV. Dunque la proposta parallela, che dee passare per l'estremo della QY (33.*El.I.*), dovrà cadere sulla parabola. Inoltre si tiri al punto Q di questa curva la tangente QN, e presa la QL uguale alla PQ, si distenda per lo punto L la retta AC parallela alla QN, che dovrà incontrar la parabola ne' punti A, C. Finalmente si uniscano le rette PC, PA: dico esser queste le due tangenti condotte alla parabola dal dato punto P.

Dim. Imperocchè, per costruzione, la PL è doppia della QL: dunque tanto la PC, che la PA dovrà esser tangente della parabola (41.). — *C. B. D.*

62. Cor. La retta PL, che unisce il concorso delle due tangenti AP, CP della parabola AQC col punto medio L del-

la retta AC fra contatti, è il diametro di questa corda. Imperocchè se il diametro di AC fosse $Lp$, sarebbe dupla dell' ascissa $Lq$ tanto la sottangente $Lp$, che l' altra $Lr$ (58.). Lo che ripugna.

## PROPOSIZIONE XI.

### TEOREMA.

63. Se le due corde DA, BN [*fig.* 18. 19] della parabola ADN s' intersegliino in C, dentro questa curva, o fuori di essa; i rettangoli DCA, BCN de' loro segmenti, saranno proporzionali a' parametri GQ, IP de' diametri GM, IL, di cui sono ordinate le suddette corde.

Dim. Cas. 1. Dal punto C [ *fig. 18.* ] dell' intersezione di tali corde, il quale stia entro la parabola, si meni la CF parallela al diametro GM, e dalle due CF, CM si compia il parallelogrammo CMHF. E poichè i quadrati delle semiordinate DM, FH sono respettivamente uguali a' rettangoli delle loro ascisse GM, GH nel parametro GQ ( 52. ); sarà la differenza di quei quadrati uguale alla differenza di questi rettangoli: e la differenza de' quadrati delle rette DM, FH, o delle DM, MC è uguale al rettangolo DCA (5. *El. II.*); e la differenza de' rettangoli di GM in GQ, e di GH in GQ è il rettangolo di MH, o di CF in GQ. Dimostrando in simil guisa dover essere il rettangolo BCN uguale a quello, che si farebbe dalle due FC, IP; sarà il rettangolo DCA all' altro BCN, come il rettangolo di FC in GQ a quello di FC in IP, cioè come GQ ad IP.

Cas. 2. Dal punto C [ *fig. 19.* ] dell' intersezione delle dette corde, il quale stia fuori della parabola ADN, si conduca la CF parallela al diametro GM, che dovrà in un pun-

to F incontrare la curva. Inoltre per F si tiri la semiordinata FT al diametro IT; saranno i quadrati di FT, e di BL respettivamente uguali a' rettangoli di TI in IP, e di LI in IP. E quindi la differenza de' quadrati di CL, e di BL, cioè il rettangolo NCB(6.*El.II.*) pareggerà il rettangolo di LT, o di CF in IP. Similmente può dimostrarsi il rettangolo DCA essere uguale all' altro di GQ in CF. Dunque siccome i rettangoli di CF in IP, e di CF in GQ sono nella ragione di IP a GQ, così gli altri rettangoli NCB, DCA saranno nella ragione de' parametri IP, GQ. — *C. B. D.*

64. Cor. 1. Se una corda HK [*fig.20.*] della parabola HMK interseghi le due ordinate AB, CD di un qualunque diametro di tal curva; *i rettangoli de' segmenti di queste ordinate saranno proporzionali a' corrispondenti rettangoli de' segmenti di quella corda.* Cioè a dire dovrà stare AEB : CFD :: HEK : HFK.

65. Cor. 2. *E se la detta corda incontri i diametri* MR, PS *della parabola; i rettangoli de' segmenti di essa corda saranno proporzionali alle parti di que' diametri, da essa troncati verso de' loro vertici.* Cioè dovrà essere MN : PQ :: HNK : HQK. Imperocchè dal caso 1. si deduce, che sia [*fig.18.*] AMD : ACD :: MG : CF.

## PROPOSIZIONE XII.

### TEOREMA.

66. Se dal punto C [*fig.* 21.] esistente fuori la parabola ABN cadano in questa curva la tangente CA e la segante CN, che non sia parallela ad un diametro; il quadrato della tangente CA starà al rettangolo della segante CN nella sua parte esterna CB, come il parametro del diametro, che passa per lo contatto A, al parametro di quell' altro diametro, che avrebbe per ordinata la parte interna BN di quella segante.

Dim. Dal punto C si meni la CF parallela al diametro AD della parabola; e per lo punto F, ove quella incontra la curva, conducasi la FE parallela alla tangente CA. Sarà il quadrato della semiordinata FE uguale al rettangolo della sua ascissa AE nel parametro del diametro AD; cioè, a cagion del parallelogrammo ACFE, sarà il quadrato della tangente AC uguale al rettangolo di CF nel parametro di AD. Ma il rettangolo NCB si è dimostrato uguale all' altro di CF nel parametro di quel diametro, che avrebbe la NB per ordinata (*cas.2.pr.12.*). Dunque sarà il quadrato della tangente CA al rettangolo NCB, come il rettangolo di CF nel parametro di AD all' altro della stessa CF nel parametro del diametro cui è ordinata la NB, cioè come il primo di questi due parametri all' altro. — *C. B. D.*

67. Cor. 1. Si conduca dal medesimo punto C, l' altra tangente CG alla parabola ABN. Sarà il rettangolo NCB al quadrato di CG, come il parametro del diametro, cui è ordinata la NB al parametro del diametro, che passa per lo contatto G. Dunque, per egualità ordinata, saranno *i quadrati delle tangenti tirate dal punto C alla sottoposta parabola* ABN, *come i parametri de' diametri tirati pe' contatti loro.*

68. Cor. 2. Se interseghinsi entro la parabola, o fuori di essa due ordinate di due diametri, che sieno ugualmente distanti dall' asse; i rettangoli de' segmenti di coteste ordinate saranno tra se uguali: e pe' quattro punti, ov' esse segan la curva, potrà passarvi un cerchio (35.*El.III.*).

69. Cor. 3. E se una delle dette ordinate incontri la tangente menata al vertice dell' altro diametro; sarà il rettangolo di quella segante nella parte esterna uguale al quadrato di questa tangente. Onde il circolo descritto per coteste due sezioni, e per lo contatto dovrà seguir la parabola in que' due punti, ed insiem toccarla in quest' altro. Imperocchè essendo la parabola, e 'l cerchio toccati da una stessa retta, ed in un' istesso punto, sarà minore di ogni angolo acuto rettilineo

tanto l'angolo del contatto circolare, quanto quello del contatto parabolico. Onde la differenza di questi angoli, cioè quello delle dette curve, sarà molto minore di ogni angolo acuto rettilineo. E ciò importa, perchè la parabola e 'l cerchio abbiansi a toccare.

70. Def. v. Tre grandezze si dicono essere in *proporzione armonica*, se la massima di esse stia alla minima, come l'eccesso della massima sulla media all'eccesso di questa sulla minima.

I numeri 6, 4, 3 sono in tal proporzione; imperocchè sta 6 : 3 :: 6 — 4 : 4 — 3 :: 2 : 1.

71. Cor. 1. Se nella retta AE [*fig*.22.] prendansi dall'estremo A le due parti AO, AD, che facciano con essa un'armonica proporzione, cioè tale, che stia AE : AD :: AE — AO : AO — AD, ovvero AE : AD :: EO : OD; tal retta si dirà divisa armonicamente ne' punti O, D.

Ed essendo AE : AD :: EO : OD, sarà pure, *permutando*, AE : EO :: AD : OD.

72. Cor. 2. Vale a dire: *una retta si dirà divisa armonicamente in due punti, quando l'intera retta stia all'un de' suoi segmenti estremi, come l'altro estremo al medio.*

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

73. Se da un punto A [*fig*.23.] esistente fuori la parabola GNE le si conducano le due tangenti AB, AC, ed una segante ADE, che incontri la detta curva in due punti; cotesta segante sarà divisa armonicamente dalla curva, e dalla retta fra' contatti.

Dim. Si divida per metà la retta BC fra' contatti, e si uni-

sca il punto di tal bisezione col concorso delle proposte tangenti, per mezzo della retta SA. La parte NS di questa congiungente dovrà essere il diametro dell' ordinata BC (62.). Inoltre da' punti D, E si tirino le ordinate DL, EG al diametro NS, che incontrino la tangente ACF in H, F; e per lo punto C si tiri la CM parallela alla NS.

E poichè il rettangolo GFE sta al quadrato di FC, come il parametro del diametro NK a quello dell' altro diametro CM (65.): ed in questa ragione è anche il rettangolo LHD al quadrato di CH; sarà GFE : LHD :: $FC^2 : CH^2$. Ma per la similitudine de' triangoli KAF, PAH, sta $KF^2 : PH^2 :: KA^2 : PA^2$; e per la simiglianza degli altri due KAE, PAD l'è anche $KE^2 : PD^2 :: KA^2 : PA^2$. Dunque sarà $KF^2 : PH^2 :: KE^2 : PD^2$, e perciò dovrà essere (19. *El. V.*) GFE : LHD :: $KF^2 : PH^2 :: FA^2 : HA^2$. Sicchè uguagliando fra loro quelle ragioni, che si sono mostrate uguali alla medesima ragione di GFE ad LHD, sarà $FC^2 : CH^2 :: FA^2 : AH^2$, ed FC : CH :: FA : AH. E quindi ancora EO : OD :: EA : AD.

74. Cor. Dall'estremo E della segante AE, al punto medio S della CB fra' contatti si conduca la retta ES, che incontri la semiordinata DP in L, ed in V la sua parallela tirata per lo punto A. Sarà KE : PL :: SK : SP, pe' triangoli simili KSE, PSL. Ma è poi SK : SP :: OE : OD, ed OE : OD :: AE : AD; e questa ragione, pe' triangoli simili AKE, APD, è uguale a quella di KE a PD. Dunque sarà KE : PL :: KE : PD. Onde essendo uguali le PD, PL, il punto L dovrà cadere nella curva.

E però : *La retta* ES, *che da un punto della parabola* ECN *conducesi al punto medio* S *della retta* BC *fra' contatti, e si distende insino alla* AV *parallela alla* BC *dal concorso delle tangenti* BA, AC, *è divisa armonicamente in* S, L *dalla retta* BC, *e dalla curva*.

75. Def. vi. Se da' punti della divisione armonica di una retta s' inclinino quattro altre rette, o con-

correnti ad uno stesso punto, o pur parallele tra lolo, tali quattro rette si diranno *armonicali*.

*E nel primo caso si potran dire* armonicali concorrenti; *nel secondo* armonicali parallele.

La proprietà di questa denominazione, datale dal de la Hire, si rileverà dall' enunciazione del seguente lemma.

E quelle che partono da' punti estremi della retta divisa armonicamente le diremo *armonicali estreme*; ed *armonicali medie* le rimanenti due. Le altre poi, che partono dal primo e terzo punto della divisione armonica della retta, o pure dal secondo e quarto, potran dirsi *armonicali alterne*.

## LEMMA.

76. Se tra le rette armonicali se ne inclini un'altra, che le incontri, questa dovrà rimaner anche divisa armonicamente ne' punti d' incontri.

*Questa inclinata la diremo per brevità* trasversale.

Dim. Le armonicali BA, DA, EA, CA sieno concorrenti in A [ *fig.24.n.1.* ]; e tra esse conducasi la trasversale FHKM: dovrà questa rimaner divisa armonicamente in H, K.

Si tiri per un de'quattro punti della divisione armonica della BC, e sia E, la PEN parallela ad una delle armonicali estreme AB, e tra le armonicali alterne AC, AD; sarà pe' triangoli simili ABC, NEC, AB : EN :: BC : EC; e per gli altri ABD, PED starà AB : PE :: BD : DE. Ma è per supposizione BC : CE :: BD : DE. Adunque sarà pure AB : EN :: AB : PE, ed EN uguale ad EP. Laonde se pel punto K ove la trasversale FM incontra la AE si tiri la GKL parallela alla PEN, o alla AB, e tra le stesse armonicali alterne AC, AD; dovrà questa rimanere anche divisa per metà in K, ed essere GK uguale a KL. Ma AF : GK :: FH : HK, ed AF : KL :: FM : MK. Adunque, siccome AF serba ragioni uguali alle uguali GK, KL, così dovrà risultare FH :

HK :: FM : MK ; e però la FM sarà divisa armonicamente in H, K. — *C. B. D.*

77. Cor. Rilevasi dalla precedente dimostrazione, che se la retta GL sia parallela ad una delle armonicali concorrenti, essa rimarrà divisa per metà dalle rimanenti tre armonicali. Così la GL parallela alla AB si è veduto rimaner divisa per metà in K tra le AD, AE, AC; la KQ parallela alla AC [*f.24. n.2.*] il sarebbe in O dalla AD, e tra le AB, AE; e la KR parallela alla AD il sarebbe in S dalla AC, e tra le AB, AE.

78. Scol. E da ciò risulta un modo semplicissimo di assegnar in una retta, in cui sien fissati tre punti A, D, C il quarto di armonica divisione, alterno ad un di essi, a B, per esempio.

Imperocchè preso fuori della retta BC [*fig.24.n.2.*] un punto A ad arbitrio, congiungansi le AB, AE, AC, e tirata per E la PN parallela alla AB, su cui non trovasi il punto B, si tagli la EP uguale alla EN; congiunta la AP, segnerà questa nella BC il quarto punto D dell'armonica divisione alterno a C.

## PROPOSIZIONE XIV.

### TEOREMA.

79. Se dal punto R [*fig.* 25.] conducansi ad una parabola le due seganti RB, RT, e si formi il quadrilatero ABTV, tanto i suoi lati opposti AV, BT, quanto le diagonali BV, AT, s' intersegheranno sulla retta FG, che unisce i contatti delle tangenti condotte da quel punto R.

Dim. Part. 1. *Rispetto a' lati.*—Si produca l' un di essi, BT per esempio, finchè incontri la FG in S, e si congiunga la RS

E poichè la RB è divisa armonicamente in C, ed A, tiran-

do la AS , le quattro rette SR, SA, SC, SB avranno le condizioni del lemma precedente ; e però la trasversale RT sarà esse armonicamente divisa : ma la RT l'è già divisa similmente in D , e V (*prop.13.* ). Adunque la AS dovrà incontrare la RT nello stesso punto V, in dove questa incontrava la parabola.

Part.II.*Relativamente alle diagonali.*—Sia P il punto d'incontro di una di esse BV colla FG. Si congiungano le PR , PA ; saranno allora PR , PA , PC , PB le quattro rette condizionate come nel lemma ; e perciò la trasversale RT, dovendo da esse rimaner divisa armonicamente , ne segue che la AP prodotta debba incontrarla in T.

80. Cor. Se le due seganti RB , RT [ *fig.26.* ] , cadendo dalla medesima parte della curva , l'una di esse RT si avvicini tanto all'altra RB fino a riunirsi , o per meglio dire esse non formino che la sola segante RB , allora le congiungenti AV, BT si cambieranno nelle tangenti in A , B ; e perciò le medesime concorreranno in un punto colla retta tra' contatti FG . Ed in fatti tirata per A la tangente, che incontri la FG in S , se la SB non sia pur essa tangente della curva, dovrà segarla in un altro punto T ; ed allora congiunta la RT , che incontrerà la curva in un altro punto V , ne seguirebbe che le VA , TB si avrebbero ad unire in un punto , che non è sulla FG ; mentre pel teorema dimostrato debbono concorrere su questa retta.

## PROPOSIZIONE XV.

### TEOREMA.

81. Se per gli estremi delle seganti una parabola , che passino tutte per un punto dato le si tirino le tangenti ; i punti del loro concorso saranno allogati in una retta data di posizione.

HK :: FM : MK , e però la FM sarà divisa armonicamente in H, K. — *C. B. D.*

77.Cor.Rilevasi dalla precedente dimostrazione, che ogni retta parallela ad una delle armonicali concorrenti rimarrà divisa per metà dalle rimanenti tre armonicali . Così la GL [ *fig.24.n.2.* ] parallela alla AB si è veduto rimaner divisa per metà in K dalla AE tra le AD, AC ; la KQ parallela alla AC il sarebbe in O dalla AD , e tra le AB , AE ; e la KR parallela alla AD il sarebbe in S dalla AC, e tra le AB, AE.

78. Cor. 2. Se le due armonicali alterne BA,AE [*fig.24. n.3.*] fossero ad angolo retto : tirata tra le altre due armonicali AD, AC la retta DFG parallela alla AB, ed essendo la DF uguale alla FG , e gli angoli in F retti ; dovrà l' angolo DAF pareggiare l' altro FAG ; e però ancora l' altro BAD sarà uguale all' angolo CA*b*. Laonde :

*Se due armonicali alterne sieno ad angolo retto ; le altre due dovranno inclinarsi ugualmente a ciascuna di quelle.*

## PROPOSIZIONE XIV.

### TEOREMA.

79. Se da un punto fuori la parabola conducansi ad essa le due tangenti , e due seganti ; le congiungenti le intersezioni superiori tra loro , e le inferiori ancor tra loro o saranno parallele alla retta fra' contatti , o concorreranno con questa in uno stesso punto.

Dim. Part.1. Sieno primieramente ALG , ADE [*fig.23.*] le seganti , ed AB, AC le tangenti , e la congiungente LD delle intersezioni superiori L , D sia parallela alla retta BC fra' contatti. Sarà AL ad LQ, come AD a DO (*2.El.VI.*). Ma sta AL ad LQ, come AG a GQ, ed AD a DO, come AE

ad EO, per le divisioni armoniche di tali rette. Adunque sarà AG a GQ, come AE ad EO ; e dividendo AQ a QG , come AO ad OE. E però la GE sarà parallela alla QO, o BC.

Part. II. La congiungente BT [ *fig. 25.* ] le intersezioni inferiori incontri la retta FG fra' contatti delle tangenti condotte dal punto R, da cui son tirate le seganti RAB, RVT, in S , e si congiunga la RS.

E poichè la RB è divisa armonicamente in C, ed A , tirando la AS, le quattro rette SR, SA, SC, SB avranno le condizioni del lemma precedente ; e però la trasversale RT sarà da esse armonicamente divisa : ma la RT l' è già divisa similmente in D , e V ( *prop.13.* ) . Adunque la AS dovrà incontrare la RT nello stesso punto V , in dove questa incontrava la parabola.

80. Cor. 1. Congiungasi la BV , che incontri la FG in P ; saranno le PR, PA, PC, PB quattro rette armonicali, come parimente il sono le PR, PV, PD, PT. Adunque la PT dovrà essere per dritto alla AP; e però:

*Le congiungenti diagonalmente i punti d' intersezioni delle due seganti, o sia le diagonali del quadrilatero ABTV, s' intersegheranno eziandio sulla retta FG, che unisce i contatti.*

81. Cor. 2. E vicendevolmente essendo SVA, STB due seganti la parabola condotte dal punto S, e P il punto ove intersegansi le diagonali BV, AT ; dovrà essere RP la retta fra' contatti delle tangenti la parabola tirate da S.

82. Cor. 3. Se le due seganti RB, RT [*fig. 26.*] , cadendo dalla medesima parte della curva , l' una di esse RT si avvicini tanto all'altra RB fino a riunirvisi, o per meglio dire esse non formino che la sola segante RB, allora le congiungenti AV, BT si cambieranno nelle tangenti in A, B ; e perciò le medesime concorreranno in un punto colla retta tra' contatti FG . Ed in fatti tirata per A la tangente , che incontri la FG in S , se la SB non sia pur essa tangente della curva, dovrà segarla in un altro punto T; ed allora congiun-

ta la RT, che incontrerà la curva in un altro punto V, ne seguirebbe che le VA, TB si avrebbero ad unire in un punto che non è sulla FG; mentre pel teorema dimostrato debbono concorrere su questa retta.

## PROPOSIZIONE XV.

### TEOREMA.

83. Se per gli estremi delle seganti una parabola, che passino tutte per un punto dato le si tirino le tangenti; i punti del loro concorso saranno allogati in una retta data di posizione.

Part. i. Se il punto è fuori, come R [*fig.26.*], la verità della proposizione enunciata risulta immediatamente dal cor. prec.; d'onde segue, che qualunque sia la segante tirata per R, le tangenti nelle sue estremità concorreranno sempre sulla retta FG tra i contatti delle tangenti RF, RG.

Part.ii.Se poi il punto è dentro, come K [*fig.27.*], condotto per esso il diametro KF, l'ordinata DB, e le tangenti DE,BE, sia AS una qualunque segante che passi per K; tirata per S la tangente SV, che incontri in V la parallela condotta per E alla DB; dovrà la VA risultare anche tangente; giacchè dovendo la VH (*cor.pr.13*) esser divisa armonicamente in H, M dalla curva, ed in K dalla retta BD fra' contatti delle tangenti condotte da E, se invece di VA fosse altra la tangente in A, il quarto punto di armonica divisione sarebbe diverso da K; il che non può essere. Quindi il concorso delle tangenti nelle estremità delle corde, che passano per K sarà sempre nella EV.

84. Cor. Adunque: *Le tangenti tirate per le estremità di una corda della parabola, condottavi per un punto dato, debbono concorrer sempre in una retta data di posizione*, che, essendo il punto fuori della curva, è la retta fra' contatti delle

tangenti che da quel punto tiransi alla curva ; e , trovandosi dentro , è la parallela alle ordinate del diametro, che passa per quel punto , condotta per l' estremo della sottangente corrispondente al punto stesso.

85. Scol. Questa singolar proprietà della parabola , che in appresso vedremo convenevolmente estendersi alle altre due curve coniche, e ch' è feconda di molte importanti verità, e sviluppi, ha dato luogo presso i moderni alla seguente:

86. Def. vii. La retta di sito, in cui convengono le tangenti tirate per gli estremi di una qualunque segante della parabola*(lo stesso per le altre curve coniche)* condottavi per un dato punto fisso, dicesi *polare* di un tal punto, il quale prende il nome di *polo*.

87. E però la polare di un punto dentro o fuori una curva conica è la parallela alla tangente verticale del diametro che passa per quel punto , tirata dal punto stesso , allorchè è fuori , e , quando è dentro , dall' incontro delle tangenti nelle estremità di quella corda , ch' è bisecata nel punto .

88. E però : *Nella parabola la polare dista dal vertice del diametro di cui è ordinata , per quanto dista il vertice dal polo* (84. e 60.).

89 Scol. 1. Dalla definizione or data, applicata al precedente teorema, ed a' corollari di esso, si potrebbero ricavare molte importanti verità circa i *poli* e le *polari* , le quali oltre all' esser superflue in questo luogo , come che appartengonsi ancora alle altre curve coniche, abbiamo stimato a proposito di recarle nelle *Note* in fine del presente volume, ove altri teoremi nuovi, ed importanti sulle *polari* verranno addotti . E qui basti solo notare, che adattando queste denominazioni alla prop. xiii. ed al suo corollario , si ha , che:

*Tutte le seganti della parabola, che passano per uno stesso punto sono armonicamente divise , dalla curva , dal punto , e dalla polare di questo.*

90. Scol. 2. Inoltre essendo R il polo di FG [*fig*.25.], ed S quello di RP (81 ed 86), le quali corde della parabola passano per lo stesso punto P, e però risultando R, S due punti della sua polare; sarà P il polo della RS. E quindi:

*Ciascun de' punti P, R, S, in cui incontransi le diagonali, ed i lati opposti prodotti del quadrilatero ABTV iscritto in una parabola, è polo della retta che unisce gli altri due.*

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

91. Se le tangenti verticali AC, BD [*fig*.28.], a' due diametri AP, BQ della parabola BAR, incontrino questi vicendevolmente in C, D; e che sull'un di essi, prolungato oltre il vertice, prendasi la AE uguale alla AC, e su questa la AH quanto il semiparametro di AP; la congiunta HE dovrà risultar parallela all' altra tangente BD.

Dim. Pe' vertici A, B si tirino le AI, BF, parallele rispettivamente alle tangenti BD, AC, e per C la CG parallela alla BD. Ed essendo $BF^2$ uguale al rettangolo di AF, o BC in 2HA, ossia a quello di CI in HA (54.); sarà CI : BF, o CA :: BF, o AE : AH; e quindi i triangoli ACI, HAE saranno simili, ed avendo l' angolo EAH uguale all' altro ACI; sarà la EH parallela alla AI; e quindi alla BD.

92. Cor. Da questo teorema si ha un' altra maniera di condurre la tangente alla parabola, diversa da quella recata ne' §§. 41 e 54, in un punto B del suo perimetro, Poichè essendo AP il diametro primitivo, ed AC la sua tangente nel vertice A, che incontri il diametro per B in C; presa la AE uguale alla AC, e la AH uguale al semiparametro di AP, con-

giungasi la HE, alla quale si tiri la parallela BD, che sarà la tangente in B.

## PROPOSIZIONE XVII.

### PROBLEMA.

93. Dato un diametro di una parabola, l'angolo delle coordinate, e'l parametro; assegnare il vertice, e 'l parametro di un' altro diametro, dato l' angolo delle sue coordinate.

Soluz. Sia AT [*fig.28.*] la tangente nel vertice A del diametro dato AP, e su di essa sia segnato il corrispondente semiparametro AH; e sia N l' angolo delle coordinate dell' altro diametro.

S' inclini da H al diametro AP la HE nell' angolo HEA uguale al dato N; e presa la AC uguale alla AE, tirisi per C il diametro CBQ, che sarà il richiesto. E per ottenerne il semiparametro basterà prendere sul diametro BQ prolungato al di fuori la BK uguale alla BD, e tirar quindi per K la KL parallela alla AH, che incontrando la BD in L vi determinerà il semiparametro BL pel diametro BQ.

Dim. La dimostrazione è chiara dalla precedente proposizione.

94. Cor. Se il diametro richiesto fosse stato l' asse, la HE sarebbe risultata perpendicolare al diametro AP prodotto al di fuori; ond'è che rimane agevolmente risoluto il problema di:

*Assegnare l' asse, il vertice, e'l parametro principale di una parabola, dato il parametro e l'angolo delle coordinate di un qualunque diametro della medesima.*

## CAPITOLO III.

### De' fuochi della parabola.

95. Def. viii. *Fuoco* della parabola dicesi quel punto dell' asse, ove l' ordinata, che vi corrisponde, è quanto il parametro principale.

96. Def. ix. *Punto di sublimità* appellasi poi quello ove concorrono le tangenti condotte alla parabola per gli estremi dell' ordinata focale.

97. Def. x. La retta, che per lo punto di sublimità si distende parallela alle ordinate dell' asse, si chiama *linea di sublimità*, o *direttrice*.

Dunque la linea di sublimità è precisamente la *polare* del fuoco (86.).

98. Cor. 1. Suppongasi l' ordinata M*m* [*fig.* 29.] all' asse AQ uguagliare il parametro principale AX; sarà F il fuoco della parabola. Ed essendo continuamente proporzionali le rette AF, FM, AX; siccome FM è metà di AX, così AF dovrà esser metà di FM, e quindi quarta parte di AX. E sarà pure FA uguale ad AD, posto che D sia il punto di sublimità.

Segue da ciò, che: *Il fuoco della parabola dista per la quarta parte del parametro principale del vertice dell' asse. E da tal vertice per altrettanto dee distare il punto di sublimità.*

99. Cor. 2. Quindi se FM [*fig.* 30.] sia la semiordinata focale, e D il punto di sublimità, le DM, D*m* saranno le tangenti in M, *m*; l' angolo FDM sarà semiretto, al pari dell' altro FD*m*; e perciò retto quello delle tangenti DM, D*m*. Cioè:

*Le tangenti condotte alla parabola dal punto di sublimità, comprendono un angolo retto.*

100. Def. xi. Ogni rètta, che dal fuoco della parabola conducesi ad un qualunque punto di essa, si

dice *ramo*; e da taluni anche *inclinata*, o *raggio vettore*.

101. Tutte le precedenti definizioni, come vedrassi ne' due seguenti libri, convengono pure all' ellisse, ed all' iperbole.

## PROPOSIZIONE XVIII.

### TEOREMA.

102. Nella parabola la tangente PRG [*fig*. 29.] il ramo FR, la normale RQ, e 'l diametro corrispondente, sono rette armonicali.

Dim. Poichè OP è uguale a 2AP (60.), e QO a 2AF (60.); sarà PQ uguale a 2FP; e quindi QF uguale ad FP. Ed è la QP parallela alla RS. Adunque le quattro rette RP, RF, RQ, RS saranno armonicali (*lem*. §. 76.).

103. Cor. 1. Essendo armonicali tali rette; e retto l' angolo PRQ delle alterne di esse RP, RQ, dovrà esser l' angolo PRF uguale all' angolo SRG (78.). Cioè:

*Il ramo e 'l diametro per un punto della parabola inclinansi ugualmente alla tangente in quel punto.*

104. Cor. 2. La retta FP è uguale ad FA + AP, cioè ad FA + AO. Dunque il ramo FR, che si è dimostrato uguale ad FP, sarà uguale ad FA + AO. Vale a dire:

*Ogni ramo è quarta parte del parametro del diametro, corrispondente al suo estremo* (56.)

## PROPOSIZIONE XIX.

### TEOREMA.

105. Nella parabola LAR [*fig*. 30.], ciascun ramo FR è uguale alla distanza del suo estremo R dalla TDS linea di sublimità di una tal curva.

E lo stesso ramo è quanto la semiordinata all' asse pel suo estremo , distesa insino alla tangente che procede dal punto di sublimità verso di esso ramo.

Part. I. Il ramo FR [*fig.30.*] è uguale ad FA, o sia ad AD più AO ( 104. ) , cioè ad OD ; e quindi alla perpendicolare RT tirata dal suo estremo R sulla linea di sublimità DT.

Part. II. Poichè l' angolo FDM è semiretto (101.) , ed è retto l' altro DON ; sarà ancor semiretto l' angolo OND ; e quindi OD, o FR sarà uguale ad ON.

106. Cor. La retta RT si distenda finchè incontri in K una sottoposta ordinata CH all' asse AO. Sarà FR con RK uguale a TK , ch' è la distanza della detta ordinata dalla linea di sublimità di essa curva.

E perciò : *Ogni ramo, accresciuto della distanza del suo estremo da una sottoposta ordinata all' asse, è di una costante grandezza, cioè quanto la distanza della detta ordinata dalla linea di sublimità.*

## PROPOSIZIONE XX.

### TEOREMA.

107. Se ad un punto R [*fig.*31.] della parabola RAK conducasi il ramo FR , e la normale RQ , e poi dal punto Q, ove questa incontra l' asse di tal curva, si abbassi la QB perpendicolare al detto ramo; il segmento RB, tolto da esso ramo verso quel punto R, sarà quanto il semiparametro principale.

E la normale sarà media proporzionale tra 'l detto ramo, e 'l parametro principale.

Dim. Part. I. Essendo FR uguale ad FQ (102, e 104) , sarà l'angolo BRQ uguale all'altro OQR . Laonde i triangoli

rettangoli RBQ, ROQ, per la 26.*El.I.*, dovranno avere la RB uguale alla OQ. E perciò RB sarà al pari di OQ (60.) quanto il semiparametro principale.

Part. ii. Nel triangolo rettangolo PRQ è RQ' uguale al rettangolo di PQ in QO, e però uguale all'altro di FR metà di PQ in AX doppio di QO (60). Laonde starà FR a QR, come QR ad AX. — *C.B.D.*

108. Cor. Si abbassi dal punto F [ *fig.* 29. ] la FN perpendicolare alla tangente RP, sarà la RN uguale alla NP, come l'è FR uguale ad FP; ed è pure PA uguale ad AO; perciò la AN sarà parallela alla OR (2.*El.VI.*); e l'angolo in A retto. Quindi AN sarà la tangente nel vertice principale A. Adunque:

*La tangente della parabola nel vertice principale è il luogo de' punti d' incontro delle tangenti laterali colle perpendicolari tirate dal fuoco della curva a ciascuna di esse* *.

## PROPOSIZIONE XXI.

### TEOREMA.

109. Se a' punti K, R [*fig.* 32.] della parabola KPR conducansi le due tangenti TK, TR, ed i due rami FK, FR; la retta FT, che unisce il fuoco di una tal curva col concorso di quelle due tangenti, dividerà per metà l' angolo RFK de' rami.

Dim. Si tiri la retta KR fra'contatti, ed abbassate le perpendicolari KA, RB da' punti K, R sulla linea AN della sublimità della parabola, vi si conducano le tangenti PN, QN per gli estremi della corda PFQ. S' intenderà che le tre rette PN, QN, KR abbiansi ad incontrare in uno stesso punto

* Cioè, che ciascuna di quelle perpendicolari incontra la tangente alla quale è stata tirata nel punto ove questa interseca la tangente verticale.

(82.). Onde siccome il concorso delle due tangenti PN, QN dee cadere in quella retta AN, ch' è (88.) la polare del fuoco F, pel quale è tirata la PQ; così l' incontro di tutte tre le rette PN, QN, KR dovrà trovarsi nella retta AN. E poichè la retta KN è armonicamente divisa in O, R (73), dee stare KO : OR :: KN : NR. Ma la seconda di queste due ragioni, pe' triangoli simili KNA, RNB, è uguale a quella di KA ad RB, o a quell'altra de' rami FK, FR, essendo questi rami uguali a quelle perpendicolari (105.). Adunque sarà KO : OR :: FK : FR; e quindi l'angolo RFK de' rami dovrà esser diviso per metà della retta FT (3.*El.VI.*) — *C.B.D.*

110. Cor. 1. Adunque la retta, che congiunge il fuoco della parabola col concorso di due tangenti di questa curva, dee essere ugualmente inclinata a' rami che vi si conducono da' contatti. E, *se mai stiano per dritto questi due rami, quella congiugnente dovrà essere ad essi perpendicolare.*

111. Cor. 2. Le due tangenti RE, CE [*fig.31.*], condotte alla parabola RAC per gli estremi de' rami FR, FC, incontrino l' asse in P, H. Saranno uguali gli angoli FPR, FRP del triangolo RFP, per essere FR uguale ad FP. Onde l' angolo esteriore RFQ dovrà esser duplo del solo angolo P. E dimostrando in simil guisa, che l'angolo CFQ sia anche duplo dell'altro FHC, o del suo uguale EHP; saranno i due angoli RFQ, CFQ dupli de' due HPE, EHP, o del solo REC, cioè:

*L'angolo* RFC *compreso da' rami* FR, FC, *è doppio dell'angolo* REC, *che comprendono le tangenti menate per gli estremi loro.*

112. Cor. 3. Perciò: *Se conducansi due tangenti alla parabola, per gli estremi di una corda, che passi per lo fuoco; sarà retto l'angolo compreso da queste due tangenti; il vertice del detto angolo dovrà cadere nella linea di sublimità di una tal curva; e dovrà essere perpendicolare ad essa corda la retta, che congiugne il vertice di quest'angolo col fuoco della curva.*

*Fine del libro primo.*

DELLE

# SEZIONI CONICHE

## LIBRO SECONDO

## DELL' ELLISSE.

### CAPITOLO I.

De' diametri dell'ellisse generalmente considerati.

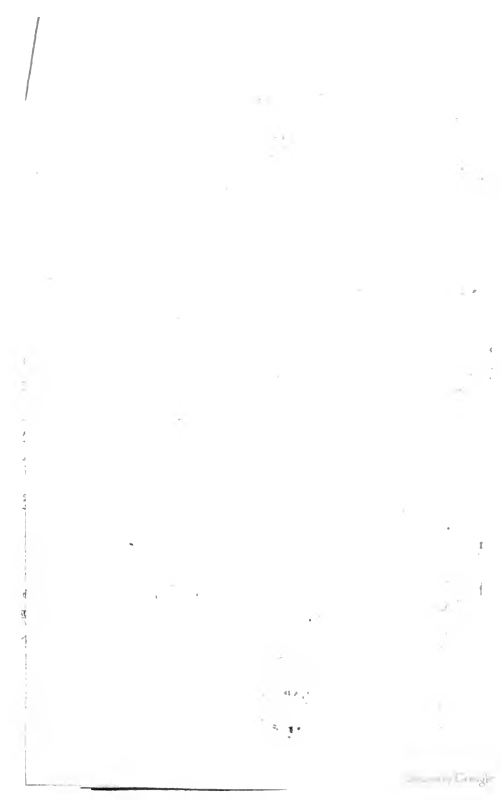
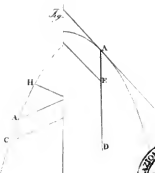
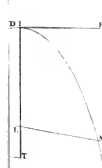
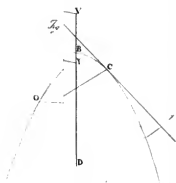
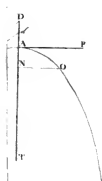
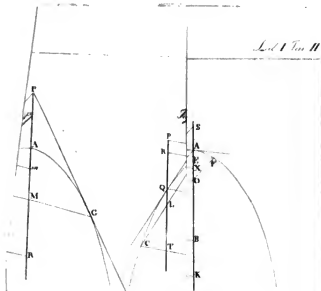
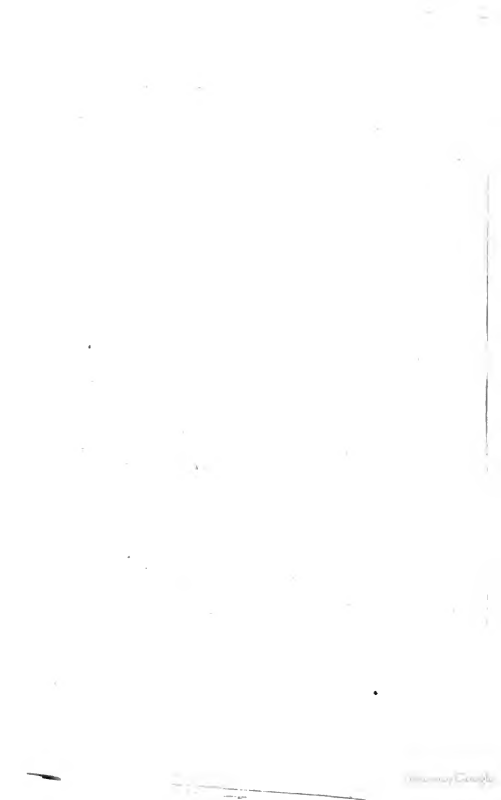
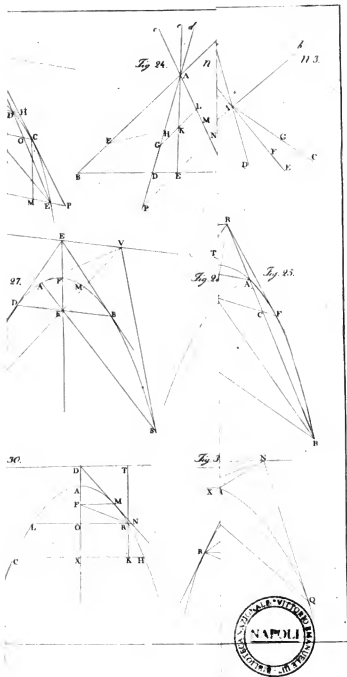
#### PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

113. Nell' ellisse AND [*fig.* 1.] , il quadrato di una qualunque semiordinata MN sta al rettangolo AMD delle ascisse da amendue i vertici A , D, come il lato retto al trasverso , cioè , come il parametro al diametro.

Ed i quadrati di due semiordinate NM, *nm* sono tra loro come i rettangoli AMD , A*m*D delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici A , D.

Dim. Part. 1. Il quadrato della semiordinata NM è uguale al rettangolo della corrispondente ascissa AM nella perpendicolare MQ erettale dal suo estremo , e distesa insino alla regolatrice DB (30.). Ma il rettangolo di AM in MQ sta all' altro di AM in MD, come MQ ad MD , o come AB ad

Fig. 24.
Fig. 25.
27.
30.

AD, pe' triangoli simili DMQ, DAB. Dunque sarà $NM^2$ : AMD :: AB : AD.

Part. II. Intanto alla medesima ragione di AB ad AD è uguale sì quella di $NM^2$ ad AMD, che l'altra di $nm^2$ ad A*m*D. Dunque queste due ragioni saranno tra se uguali; cioè a dire starà $NM^2$ : AMD : $nm^2$ : A*m*D. E permutando dovrà essere $NM^2$ : $nm^2$ :: AMD : A*m*D. — *C.B.D.*

114. Def. I. Nell' ellisse AND il punto medio C del lato trasverso AD si chiama *centro* di tal curva. E la retta CF, che dal centro dell' ellisse conducesi parallela alla regolatrice DB, e si distende insino al parametro AB, suol dirsi *surregolatrice.*

115. Cor. 1. Dalle due rette AM, AB si compia il parallelogrammo MABH, e l' altro MAFR compiasi dalle altre due AM, AF, e poi per lo punto Q si distenda la QG parallela alla AM. Si vedrà essere il parallelogrammo MABH duplo dell' altro MAFR; e si conoscerà agevolmente, che il rettangolo QGBH, parte della prima di quelle due figure, sia doppio del triangolo PRF parte della seconda. Dunque dovrà essere il rimanente rettangolo MAGQ doppio del rimamente trapezio MAFP (19. *El. V*), cioè $MN^2$ uguale a 2MAFP.

E perciò: *Nell' ellisse il quadrato di una qualunque semiordinata è duplo del trapezio, che la corrispondente ordinata alla regolatrice tronca dal triangolo formato dalla surregolatrice, e dalle metà del lato retto e del trasverso.*

116. Cor. 2. E quindi: *I quadrati delle semiordinate* NM, *nm* *saranno proporzionali a cotesti trapezi corrispondenti* AMPF, A*mp*F.

117. Scol. Nell' ellisse possonsi benanche, sul diametro, computar dal centro le ascisse corrispondenti alle ordinate della curva.

## PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

118. Nell' ellisse AND [*fig.* 2.] , se il semidiametro CA producasi oltre il suo vertice, sicchè esso semidiametro accresciuto di tal prolungamento, cioè la CP, sia terza proporzionale dopo un'ascissa dal centro CM, e'l detto semidiametro ; la retta, che unisce l' estremo di quel prolungamento con un estremo dell' ordinata MN corrispondente alla riferita ascissa , sarà tangente di cotesta sezione.

E l' angolo del contatto ellittico non sarà divisibile per una retta.

Dim.Part.1. Sieno DO, CF la regolatrice, e surregolatrice pel diametro AD ; e preso in questo un qualsivoglia altro punto R diverso da M , gli si ordini la RQR , e compiasi la figura come ne appare. E poichè dall'esser continuamente proporzionali le tre rette CM, CA, CP, è $CA^2$ uguale a PCM , togliendo da queste grandezze uguali il comune quadrato di CM; dovrà rimanere il rettangolo AMD uguale all'altro PMC (5 e 6 *El. II.* ). Ma questo rettangolo sta a quello di PM in MS , come MC ad MS (1.*El. VI.*) , o come AD ad AO , pe' triangoli simili CMS, DAO, cioè come AMD : $NM^2$ (113.). Dunque sarà il rettangolo di PM in MC all'altro di PM in MS, come il rettangolo di AM in MD al quadrato di NM. Laonde sarà il rettangolo di PM in MS uguale al quadrato di NM ; e prese le metà loro , sarà il triangolo PMS uguale al trapezio AMSF (115.). Finalmente aggiugnendo a questi spazi i sottoposti trapezi MRTS, MRVS, di cui il primo vedesi maggiore dell' altro ; dovrà risultare il triangolo PRT maggiore del trapezio ARVF . E se il punto *r* si fosse preso al di so-

pra di M, togliendo dal triangolo PMS, e dal trapezio AMSF respettivamente i trapezi MS$tr$, M$rv$S, il primo de' quali dell' altro è minore; dovrà rimanervi benanche il triangolo P$rt$ maggiore del trapezio A$rv$F.

Ciò posto, per la similitudine de'triangoli BRP, NMP, sta $BR^2$ ad $NM^2$, come $PR^2$ a $PM^2$, o come il triangolo PRT all'altro PMS (19.*El.VI.*). Ed è poi $NM^2 : QR^2 :: AMSF : ARVF$ (*cor.2.prop.prec.*). Dunque sarà, *ex aequo*, $BR^2 : QR^2 :: PRT : ARVF$. Ma il triangolo PRT si è dimostrato maggiore del trapezio ARVF. Dunque sarà pure $BR^2$ maggiore di $QR^2$, la BR maggiore della QR, e 'l punto B starà fuori della proposta curva. E dimostrando in simil modo, che ogni altro punto della PB, tranne il solo N, sia fuori dell'ellisse AND; quella retta sarà tangente di questa curva (40.). E ciò valga ancora per l' altra congiungente del punto P coll' altro estremo della detta ordinata.

Part. II. Dico inoltre, che ninn' altra retta possa anche nel punto N toccar l'ellisse. Imperocchè, se ciò può essere, sia N$p$ un'altra tangente di tal curva nel punto N, ed ella incontri il diametro in $p$. Si ritrovi C$r$ terza proporzionale dopo le due C$p$, CA, ed ordinata per $r$ la $rq$, si unisca la $pq$. Questa, per la parte precedente, dovrà toccare l' ellisse in $q$, e distesa in giù, poichè dee giacer fuori della curva, incontrerà l' altra tangente NP, e però ancora la N$p$. Dunque le due rette N$p$, $pq$ chiuderebbero spazio. Lo che ripugna. — *C.B.D.*

119. Cor. 1. Dall' esser le tre rette CM, CA, CP continuamente proporzionali, abbiamo conchiuso quì sopra essere il rettangolo PMC uguale all'altro AMD; onde dovrà stare PM : MA :: MD : MC.

120. Cor. 2. Di più, per essere PC : CA :: CA : CM, dovrà stare la somma degli antecedenti di queste due ragioni alla somma de' conseguenti loro, come la differenza di quelli alla differenza di questi. Cioè, rilevando coteste somme, e differenze, sarà PD : DM :: PA : AM.

Vale a dire : *Nell' ellisse il diametro, prodotto insino alla tangente, vien diviso armonicamente dalla semiordinata per lo contatto.*

121. Scol. In questo teorema è indicato quel geometrico artifizio, onde può condursi la tangente all' ellisse AND pel dato punto N, il quale non sia il vertice di tal sezione. E se nel detto vertice vorrà condurglisi la tangente, basterà distendere per esso la parallela ad una sottoposta ordinata. E la verità della costruzione potrà dimostrarsi, come nella parabola (*cor.2.prop.II.*).

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

122. La corda AB [ *fig.*3. ], che distendesi nell' ellisse EAQ, pel centro C di tal figura, è quivi divisa per metà.

E le tangenti AS, BT condotte alla detta curva per gli estremi di essa corda sono parallele fra loro.

Dim. Part. i. Per gli estremi A, B della proposta corda si tirino le semiordinate AR, BP al diametro EQ della sezione. Saranno i quadrati di coteste rette AR, BP, come i rettangoli ERQ, EPQ (113). Ma a cagione de' triangoli simili ACR, BCP, sta AR : BP :: CR : CP, e quindi $AR^2 : BP^2 :: CR^2 : CP^2$. Dunque sarà $CR^2 : CP^2 ::$ ERQ : EPQ. Laonde avrassi $CR^2 : CP^2 :: CE^2 : CQ^2$, e CR : CP :: CE : CQ ; però sarà anche CR uguale a CP ; ed i triangoli ACR, PCB, che hanno le condizioni della 26.*El.I*, dovranno avere uguali i corrispondenti loro lati CA, CB.

Part. ii. I quadrati delle CE, CQ sono respettivamente uguali a' rettangoli SCR, TCP (118.) ; onde son questi al par di quelli tra se uguali. Ma dianzi si son mostrate ugua-

li le loro basi CR, CP ; dunque le loro altezze SC, TC saran pure uguali . Il perchè i due triangoli ACS , BCT , avendo i due lati AC , CS respettivamente uguali agli altri due BC , CT , e l' angolo ACS uguale all' altro BCT ; dovranno avere anche l' angolo CAS nguale all' altro CBT. Onde sarà AS parallela a BT. — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

123. Se da un qualunque punto G [*fig*.4. ] del perimetro ellittico AG*a* conducansi le due rette GN, GB respettivamente parallele l'una alla tangente laterale QS, l' altra alla verticale AP di tal curva ; il triangolo NGB, ch'esse comprendono con una parte del diametro A*a* della sezione , sarà uguale al quadrilineo TBAP corrispondente a quel punto G.

Dim. Dal punto Q del contatto si tiri la semiordinata QM al diametro A*a* ; dovrà stare CM : CA :: CA : CS. Ma pe' triangoli simili CMQ , CAP è pure CM : CA :: CQ : CP . Dunque sarà CA : GS :: CQ : CP. Quindi ne' due triangoli CAP , CQS, reciprocando i lati d' intorno al comune angolo ACP, dovranno essere ugnali; e saranno pure tra se uguali le loro differenze dal triangolo QCM , cioè a dire il trapezio PQMA , e 'l triangolo QMS.

Or essendo i triangoli simili PCA , QCM come i quadrati de' loro lati omologhi CA, CM ; sarà , convertendo , il triangolo PCA al trapezio PQMA , come il quadrato di CA al rettangolo AM*a* : quindi , invertendo, PQMA : PCA :: AM*a* : $AC^2$ . E dimostrando in simil guisa essere PCA : PDBA :: $AC^2$ : AB*a* ; saranno , per nguaglianza ordinata, i trapezi PQMA , PTBA , come i rettangoli AM*a* , AB*a* ,

o come i quadrati delle QM , GB , cui sono proporzionali siffatti rettangoli (113) . Ma i quadrati delle QM , GB sono come i triangoli simili QSM , GNB . Dunque dovrà stare il trapezio PQMA all' altro PTBA , come il triangolo QSM al triangolo GNB; e quindi sarà il trapezio PTBA uguale al triangolo GNB,come si è mostrato il trapezio PQMA uguagliare il triangolo QSM. — *C. B. D.*

124. Cor. Di quì può inferirsi la seguente verità geometrica, cioè: *Se alla base* PA *del triangolo* CPA *si tirino le parallele* QM, TB, *e poi la* AC, *ch' è un degli altri due lati*, *si distenda in a* , *sicchè Ca l' adegui ; i trapezi* AMQP , ABTP *saranno fra loro come i rettangoli* AMa , ABa.

125. Scol. La dimostrazione del teorema precedente procede sempre nel modo stesso , sia che il punto G cada al di sotto dell' altro Q ( come nella figura 4 si è supposto) ; sia che cada al di sopra come D : nel qual caso risulterebbe il triangolo DVN uguale al trapezio PAVY. Sia che un tal punto D cadesse dall' altra parte del diametro A*a* ( come nella stessa figura 5. ): nel qual caso la retta GD incontrerebbe il diametro A*a* nel punto N al di sotto di A ; e sarebbe pure il triangolo NVD uguale al trapezio PAVY. O che finalmente l'ordinata GB [*fig.5.*] incontrasse il diametro A*a* sotto del centro ; nel qual caso il triangolo GNB pareggerebbe il corrispondente trapezio B*ap*T,

E tutto ciò , sebbene abbastanza chiaro , si potrà rendere più manifesto con lo scambiar nelle figure corispondenti la lettera G con la D , la B con la V , e la Y con T.

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

126.La retta Q*q* [*fig.*5.] , che passa per lo centro dell' ellisse AQ*a* , divide per metà tutte le corde GD , *g d* , *etc.* che dentro una tal curva condu-

consi parallele alle tangenti menate pe'suoi estremi Q, *q*. Ond' ella n' è un diametro, cui sono ordinate le dette corde.

**Dim.** Compiuta la figura, come si osserva dalle ordinate de' punti G, D sarà (*prop. prec. e scol.*) il triangolo NGB uguale al quadrilineo *a*BT*p*, e quindi lo spazio NCTG, sarà uguale al triangolo *a*C*p*, o ACP. Ma il triangolo ACP è uguale allo spazio NCYD, attesa l' uguaglianza del quadrilineo PAVY e del triangolo DVN. Dunque i due spazi NCYD, NCTG saranno uguali; e togliendone di comune il triangolo HNC, resteranno uguali i due triangoli simili DHY, THG; e però sarà HD uguale ad HG.

Che se le ordinate GB, DV cadano [*fig.6.*] dalla stessa parte del centro, si rileverà più immediatamente l'uguaglianza dello spazio NCTG col triangolo PAC; e si conchiuderà pure HD uguale ad HG.

In oltre, se il punto N cada fuori la curva [*fig.7.*]: dimostrato come innanzi lo spazio NCTG uguale al triangolo PCA, o sia allo spazio NCYD, e tolto di comune il triangolo NHC; si avrà pure HD uguale ad HG.

Finalmente cadendo (in quest' ultima ipotesi) le ordinate GB, DV [*fig.4.*] dalla stessa parte del centro, si ha subito l'uguaglianza dello spazio NCTG al triangolo PCA; e si conchiuderà come le altre volte essere HD uguale ad HG.

Adunque rimane in tutt' i casi dimostrato il teorema proposto.

127. Cor. 1. Nell' ellisse oltre al lato trasverso assegnatole dalla sua genesi, possono concepirsi infiniti altri diametri, che quivi segansi nel centro.

128. Cor. 2. Il centro dell'ellisse, i punti medii delle corde tra loro parallele, ed i contatti delle due tangenti parallele ad esse, debbono giacere per dritto. Dunque *una retta, che unisca due di questi punti, dovrà passare pe' rimanenti.*

129. Cor. 3. La retta CH [ *fig.4.* ] , che congiunge il centro dell'ellisse AC*a* col punto medio H della corda DG , dee segar la curva ne' punti Q , *q* ove le tangenti QS, *qs* sono parallele ad essa corda. Poichè se ivi un'altra tangente RF fosse parallela alla DG, anche la CR dovrebbe passare per H ; ch' è un assurdo.

130. Scol. Quindi volendo tirar all' ellisse AG*a* una tangente parallela alla data corda CD , o pur che faccia un angolo dato X col lato trasverso A*a* . Nel primo caso il punto Q del contatto si avrà dall'incontro con la curva della retta CH,che unisce il centro col punto medio della corda CD. E nell' altro facendo la stessa costruzione con la corda AL , tirata dal vertice A , che comprenda col lato trasverso A*a* l' angolo LA*a* uguale ad X .

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

131. I quadrati delle semiordinate ad un qualunque diametro dell' ellisse , sono fra loro come i rettangoli delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici del diametro.

Dim. Nella precedente proposizione si è veduto essere lo spazio NCTG [*fig. 6.*] uguale al triangolo PAC , che nella proposizione IV fu dimostrato pareggiare l' altro QCS ; che però tolto da questo triangolo e da quello spazio il comune triangolo HCN , rimarrà il triangolo GHT uguale al trapezio QHNS. E similmente si dimostrerà l' altro triangolo *ght* uguale al corrispondente trapezio Q*hn*S. Laonde i due triangoli GHT , *ght* saranno proporzionali a'trapezi QHNS , Q*hn*S. Ma que'triangoli avvegnacchè simili sono tra loro come i quadrati de' loro lati omologhi GH , *gh* ; e que' trapezi , per lo

cor. prop. IV, sono tra loro come i rettangoli QH$q$, Q$hq$. Adunque dovrà stare il quadrato di GH a quello di $gh$, come il rettangolo QH$q$ all' altro Q$hq$. — *C. B. D*:

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

132. Se da un punto M [*fig*.8.] di un qualunque diametro QP dell' ellisse QNP si elevi la perpendicolare MT, terza proporzionale dopo l'ascissa QM, e la semiordinata MN, che corrispondono a quel punto; l'estremo T della detta perpendicolare sarà allogato in una retta data di posizione, che anche dicesi *regolatrice* della proposta curva.

Dim. Sia l' altra retta $mt$ benanche perpendicolare al diametro QP nel punto $m$, e terza proporzionale dopo l' ascissa Q$m$, e la semiordinata $mn$ corrispondente al punto $m$. Saranno i rettangoli QMT, Q$mt$ uguali a' quadrati delle semiordinate MN, $mn$ respettivamente. Onde quelli al par di questi saranno come i rettangoli QMP, Q$m$P. E sarà, permutando, il rettangolo di QM in MT all' altro di QM in MP, come il rettangolo di Q$m$ in $mt$ a quest' altro di Q$m$ in $m$P, cioè MT : MP :: $mt$ : $m$P. Dunque i punti T, $t$, e gl' infiniti altri similmente condizionati, dovranno ritrovarsi in una retta data di posizione, che passa per lo punto P. — *C. B. D*.

133. Def. III. La perpendicolare ad un qualunque diametro dell' ellisse, elevata dal vertice di esso, distesa insino alla regolatrice si dirà *parametro* di tal diametro.

## PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

134. Nell' ellisse il quadrato della semiordinata NM [*fig.* 8.] ad un qualunque diametro QP, sta al rettangolo QMP delle ascisse da ambedue i vertici di essa, com' è al diametro QP il suo parametro QA.

Dim. Essendo, per lo precedente teorema, $NM^2$ uguale a QMT; sarà il quadrato di NM al rettangolo di QM in MP, come il rettangolo di QM in MT all' altro di QM in MP, o come QA a QP, pe' triangoli simili PMT, PQA — *C.B.D.*

135. Scol. 1. Cotesta proprietà essenziale dell' ellisse, che nel primo teorema di questo libro erasi dimostrata relativamente al lato trasverso di tal curva, quì vedesi dover anche convenire ad ogni altro diametro di essa. Onde tutto quello, che in conseguenza di un tal principio si è poi derivato, potrà convenevolmente appartenere ad ogni altro diametro dell' ellisse.

136. Scol. 2. Per la definizione della *sottangente* e della *sunnormale* dell' ellisse ritengansi quelle che furono recate per la parabola nel §§. 58 e 59.

## PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

137. Un qualunque diametro AD [*fig.* 2.] dell' ellisse AND, qualora incontri una di lei tangente NP, dee restar diviso armonicamente dalla curva, e dall'ordinata NM per lo contatto.

Dim. Se non sia DP : PA :: DM : MA ; stia come DM ad MA , così D$p$ a $p$A ; e poi si unisca la N$p$ . Sarà questa retta tangente dell' ellisse in N (118.) . Onde nel punto N di una tal curva vi saranno due tangente NP , N$p$. Lo che ripugna.

138. Cor. 1. In questa supposizione può similmente dimostrarsi , che sieno continuamente proporzionali le rette CP , CA , CM , cioè che :

*Se un semidiametro dell' ellisse si protragga , sin che incontri una di lei tangente , e dal contatto gli si tri un' ordinata ; saranno continuamente proporzionali l' ascissa dal centro , il detto semidiametro , e lo stesso semidiametro accresciuto della parte esterna .*

139. Cor. 2. E la sottangente PM della detta ellisse, non è dupla dell' ascissa MA , come lo era nella parabola ; ma le serba la variabile ragione di DM ad MC , cioè dell' ascissa dal vertice rimoto all' ascissa dal centro.

## CAPITOLO II.

### De' diametri conjugati dell' ellisse.

140. Def. IV. Due diametri di un' ellisse si dicono *conjugati tra loro*, se ciascun di essi sia parallelo alle ordinate dell' altro . E quello di questi due diametri, che principalmente si consideri, suol chiamarsi *primario*; l' altro poi *secondario*.

141. Scol. Da un qualunque punto E [ *fig.* 9. ] dell' ellisse AED agli estremi di un suo diametro AD si tirino le due rette EA , ED ; e pe' punti medii di questo duo corde s' intendan condotti i due semidiametri CG , CP . Questi saranno conjugati fra loro . Imperocchè la retta CH, che passa pe' punti medii de' due lati AE , AD del triangolo EAD , dee esser parallela alla base di esso , cioè alla ED, ch' è un' ordinata dal diametro MP. E da ciò comprenderemo, che il semidiametro CG sia parallelo alle ordinate dell' altro CP. Or così dimostrando , che anche la CP sia parallela alle ordinate di CG ; i due semidiametri CG , CP , in forza della presente definizione , saranno *conjugati* fra loro. E queste cose servono a chiarire l' addotta definizione ; ed a mostrare la posizione de' diametri conjugati di un' ellisse , ed i loro vari sistemi .

### PROPOSIZIONE X.

#### TEOREMA.

142. Ciascun diametro AD [*fig.* 10.] dell' ellisse ABDE , e la sua ordinata BE condottagli per lo centro , sono due diametri conjugati.

Dim. Per un qualunque punto F del perimetro ellittico ABDE, e per lo centro C conducasi la retta FCL, che incontri in L la parte opposta di tal curva. Ed oltre a ciò da' punti F, L si tirino al diametro AD la semiordinata FG, e l' ordinata LT, ed in fin si unisca la FT.

E poichè FC è uguale a CL (122.), i due triangoli equiangoli FCG, LCK avranno uguali i lati FG, LK. Ma l' è poi LK uguale a KT; dunque le due FG, KT, che per essere ordinate al diametro AD sono tra se parallele, saranno altresì uguali fra loro. E quindi la FT sarà uguale, e parallela alla GK. Or pe' due parallelogrammi GH, CT, le due rette GC, CK sono respettivamente uguali alle FH, HT. Dunque siccome le prime di queste quattro grandezze sono tra se uguali, per essere i triangoli FCG, LCK perfettamente uguali; così le altre due FH, HT saranno pure tra se uguali. Il perchè la BE, che passa per lo punto medio della corda FT, e per lo centro dell' ellisse, sarà diametro di FT (128.), e la FT ordinata di BE, ch' è il diametro secondario di AD, sarà parallela ad AD diametro primario: e con ciò i due diametri AD, BE saranno conjugati fra loro (140.). — *C.B.D.*

143. Cor. 1. In questa curva la retta AM sia il parametro del diametro AD, di cui la BE n' è il secondario. Sarà AM ad AD, come il quadrato di BC al rettangolo ACD (134.): cioè, prendendo i quadrupli di queste due grandezze, come $BE^2$ ad $AD^2$. *Dunque tra 'l detto diametro, e 'l suo parametro* AM *n' è medio proporzionale il suo diametro conjugato* BE.

144. Cor. 2. *E 'l quadrato di una semiordinata ad un qualunque diametro dell' ellisse starà al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici, com' è al quadrato di un tal diametro quello del suo conjugato.*

145. Cor. 3. Descrivasi un cerchio, che abbia il medesimo centro dell' ellisse, e per raggio un semidiametro di essa. E poi tirata una retta per due intersezioni di queste curve, si unisca il punto medio di una tal corda col centro dell' el-

lisse. *Cotesta congiungente prodotta d' ambe le parti insino al perimetro dell' ellisse ne sarà un asse*: per esser anche perpendicolare alla detta corda, e quindi alle tangenti condotte pe' suoi estremi. *E 'l suo conjugato sarà l' ordinata, che gli si meni per lo centro.*

146. Def. v. Nell' ellisse il parametro di ciascun diametro può dirsi, che sia la terza proporzionale in ordine ad esso diametro, e 'l suo conjugato.

### PROPOSIZIONE XI.

#### TEOREMA.

147. Gli assi conjugati di un' ellisse sono disuguali. E 'l maggiore di essi è il massimo diametro, il minore il minimo.

Dim. Part. i. S' è possibile, sieno uguali fra loro gli assi conjugati AB, MN [*fig.41.*] dell' ellisse AMBN. Tirata ovunque ad uno di essi la semiordinata RX; il quadrato di tal retta sarebbe uguale al rettangolo di AR in RB; imperocchè quello sta a questo. come il quadrato di MN al quadrato di AB (144.). Ma il punto X tocca la circonferenza del cerchio, che ha per diametro la BA (35.*El.III.*). Dunque cotesto circolo dovrebbe confondersi colla proposta ellisse. Ch' è un assurdo.

Part. ii. Si descrivano da' diametri AB, MN i semicircoli ADB, NFM. Egli è chiaro, che le circonferenze di questi semicerchi non debbano tagliar l' ellisse in alcun punto. Poichè, se ADB, ch' è una delle dette periferie, supponga-si tagliar l' ellisse in X, ordinata la XR al diametro AB del semicerchio ADB, dovrebbe essere il quadrato di RX uguale al rettangolo ARB; e quindi $NM^2$ uguale ad $AB^2$. Lo che ripugna alla prima parte.

Ciò premesso, dal centro C dell' ellisse AMBN si tiri ovunque il semidiametro CFD; sarà sempre la CE minore della CD, ed insiem maggiore della CF. Dunque ogni semidiametro dell' ellisse sarà minore del semiasse maggiore CB, e maggiore del semiasse minore CM. E quindi il massimo de' diametri di tal curva dovrà essere l'asse maggiore, e 'l minimo di essi il minore. — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE XII.

### TEOREMA.

148. Le rette, che congiungono gli estremi di due diametri conjugati QF, EG [*fig.*12.] dell' ellisse ABCD, costituiscono un parallelogrammo uguale alla metà del rettangolo degli assi AC, BD.

Dim. Essendo i semidiametri QH, HE respettivamente uguali agli altri HF, HG, e l' angolo QHE uguale al suo verticale FHG; sarà la QE uguale alla FG, e l' angolo GFQ uguale all' altro FQE: onde le due QE, GF, che si sono mostrate uguali, saranno benanche parallele; e la figura QEFG dovrà essere parallelogrammo.

Inoltre dagli estremi A, B del semiasse maggiore HA, e del minore HB, e dagli altri Q, E de' semidiametri conjugati HQ, HE si tirino le tangenti AL, BL, QM, EM all' ellisse ABE, che si uniran fra loro, come appare nella fig.13. e pe' punti Q, B, tirinsi le rette XQY, ZBV parallele alle BH, QH respettivamente; e congiungasi la BQ.

Ciò posto, il parallelogrammo BXYH è duplo del triangolo BQH; poichè tali figure hanno la stesa base BH, e sono tra le medesime parallele BH, XY. Ma dello stesso triangolo QBH è anche duplo l' altro parallelogrammo QZVH, per essere entrambi nella medesima base QH, e fra le medesime

parallele QH , ZV. Dunque saranno uguali i parallelogrammi BXYH , QZVH : e dovran serbare ugual ragione al terzo parallelogrammo IbPH. Or i parallelogrammi BXYH, IbPH sono come le loro basi HY, HP, vale a dire in duplicata ragione di HY , HA (138.) . Ed è ancora il parallelogrammo QZVH al medesimo parallelogrammo IbPH , come HV base del primo ad HI base del secondo , cioè in duplicata ragione di HV ad HE. Dunque sarà ancora HY : HA :: HV : HE , o sia il parallelogrammo BXYH all' altro BLAH, come il parallelogrammo QZVH al parallelogrammo QMEH, per essere respettivamente di uguali altezze sì quelli , che questi . Il perchè essendosi mostrati uguali i parallelogrammi BXYH , QZVH , anche gli altri due BLAH , QMEH dovranno essere tra loro uguali : e 'l saranno pure i triangoli BAH [*fig.12.*] QHE metà di essi. E prendendo i quadrupli di questi triangoli, emergerà il parallelogrammo ABCD uguale all' altro QEFG . Ma il primo di questi parallelogrammi è metà del rettangolo degli assi LKRS. Dunque sarà benanche l' altro parallelogrammo QEFG metà del detto rettangolo degli assi. — *C.B.D.*

149. Cor. 1. Si rileva dalla precedente dimostrazione , che : *Congiugnendo gli estremi di due semidiametri conjugati di un ellisse ne risulti un triangolo di costante grandezza , cioè , quanto quello che si ha congiugnendo gli estremi de' due semiassi conjugati.*

150. Cor. 2. Compito il parallelogrammo MNOP da' diametri conjugati QF, EG , si comprende agevolmente, che i parallelogrammi LKRS, MNOP sieno quadrupli de' parallelogrammi BLAH , QMEH . Dunque dovranno quelli uguagliarsi fra loro al pari di questi ; e perciò : *Tutt' i parallelogrammi circoscritti in tal modo ad un' ellisse sono uguali al rettangolo degli assi , e quindi fra loro .*

151. Cor. 3. Si tiri l' ordinata ET [ *fig.13.*] al semiasse minore HB ; sarà HT : HB :: HE : HI :: HV : HE ( 138. ). Ma nel progresso della presente dimostrazione si è veduto

essere HY : HA :: HV : HE. Dunque sarà benanche HY : HA :: HT : HB.

152. Cor. 4. Essendo poi HY : HT :: HA : HB, e quindi $HY^2 : HT^2 :: HA^2 : HB^2$; sarà $HA^2 - HY^2$ ad $HB^2 - HT^2$, come $HA^2$ ad $HB^2$, o come il rettangolo AYC a $QY^2$ (144.). Dunque sarà $QY^2$ uguale ad $HB^2 - HT^2$, o al rettangolo BTD. E così pure può rilevarsi, che il quadrato di ET adegui il rettangolo AYC. Cioè: *Se dagli estremi di due semidiametri conjugati di un' ellisse conducansi due semiordinate agli assi di una tal curva, questi saran da quelle divisi proporzionalmente. E 'l rettangolo di cotesti due segmenti in ciascun asse dovrà pareggiare il quadrato di quella delle dette semiordinate, ch' è parallela ad un tal asse.*

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

153. Nell' ellisse ARDQ [*fig.* 9.], la somma de' quadrati di due qualunque diametri conjugati GL, MP è quanto quella de' quadrati degli assi AD, RQ.

Dim. Si tirino dagli estremi G, M de' semidiametri conjugati GC, CM le ordinate GB, MN agli assi AD, RQ.

E poichè il quadrato dell'ipotenusa CG, nel triangolo GBC, è uguale a' quadrati de' cateti BC, BG: e per la stessa ragione $CM^2$ è anche uguale a $CN^2$ con $MN^2$; sarà la somma de' quadrati di CG e di CM uguale alla somma de' quattro quadrati di BC, di BG, di CN, e di NM. E surrogando a $BG^2$, ed $NM^2$ i rettangoli RNQ, ABD loro uguali respettivamente (152.); sarà $CG^2$ con $CM^2$ uguale alle seguenti grandezze $BC^2$, RNQ, $CN^2$, ABD; o finalmente ad $AC^2$ con $CQ^2$ (intendendosi unite insieme la prima di quelle quattro gran-

dezze con la quarta, e la seconda colla terza). Or essendo il quadrato di CG col quadrato di CM uguale al quadrato di AC col quadrato di CQ; prendendo i loro quadrupli, saranno i due quadrati de' diametri conjugati GL, PM uguali a' quadrati degli assi AD, RQ. — *C. B. D.*

154. Cor. Se due semidiametri conjugati dell' ellisse compongansi ad angolo retto, l' ipotenusa di questo triangolo sarà di una costante grandezza, dovendo sempre pareggiar quella dell' anzidetto triangolo rettangolo. Or questo geometrico *paradosso*, che ha luogo benanche per due diametri conjugati, è un principio di risoluzione del seguente problema, e di tante altre ricerche affini.

## PROPOSIZIONE XIV.

### PROBLEMA.

155. Dati di grandezza i due semidiametri conjugati GB, GK [*fig.* 14.] di un ellisse, e l' angolo ch'essi comprendono; determinarne i semiassi conjugati.

Soluz. Dal punto G si elevi al semidiametro GB la perpendicolare GA uguale all' altro semidiametro GK; ed unita la BA si descriva dal diametro BA il semicerchio AGB: e sulle rette BA, BG si abbassino le perpendicolari GO, KH, da' punti G, K. Inoltre si prenda nella GO la parte OE, che stia ad essa GO, come il cateto KH all' ipotenusa KG * del triangolo rettangolo GHK. E finalmente per lo punto E si distenda la EC parallela alla AB, e congiungansi gli estremi di questa retta con uno degl' incontri del semicerchio e della

* E da ciò può conoscersi, che in questo problema non siavi il caso impossibile.

EC. *Le congiungenti* AC,BC *saranno i semiassi addimandati.*

Si compia il rettangolo ET. E poichè per costruzione sta KH a KG, o alla sua uguale AG, come la OE, o la CT alla GO; sarà permutando KH : CT :: AG : GO :: AB : BG (8.*El.VI.*).Quindi il rettangolo di KH in BG è uguale all'altro di CT in AB, o di AC in BC. Vale a dire il rettangolo delle due rette AC, BC è quanto il parallelogrammo, che compiesi da' due semidiametri conjugati GB,GK. Ma la somma de' quadrati delle AC, BC uguaglia la somma de' quadrati de' detti semidiametri, essendo sì l' una, che l' altra uguale ad $AB^2$. Dunque le AC, BC saranno i richiesti semiassi (153.)

156. Cor. 1. Prolunghisi la retta AG, sinchè incontri in F la BF tangente del semicerchio in B. Saranno continuamente proporzionali le tre rette AG, GB, GF (8.*El.VI.*). Dunque la GF sarà il semiparametro del semidiametro AG nella detta ellisse (143.).

157. Cor.2. E se la stessa AG sia il semiasse minore della proposta ellisse, e l' altra AC il maggiore; l' arco GC sarà il luogo ove terminano le applicate, che dinotano le lunghezze di tutt' i semidiametri di questa curva. E si conoscerà chiaramente esser la GF la massima delle interposte tra il semicerchio AGB, e la BP, e la CD la minima. Adunque: *Nell' ellisse il massimo parametro è quello, che all' asse minore si conviene: e l' asse maggiore avrà poi il minore parametro*, *che* parametro principale *suol chiamarsi.*

158. Cor.4. Dal punto A conducasi la corda AQ al punto medio del semicerchio AQB; questa retta dovrà dinotare quel semidiametro della proposta ellisse, il quale pareggi il suo conjugato, e con ciò benanche il suo semiparametro. E quindi: *Il quadrato di ciascuna semiordinata a questo diametro sarà uguale al rettangolo delle ascisse d' amendue i vertici di esso* (144.).

159. Scol. Con queste geometriche guide si potrebbero

con pari agevolezza risolvere i seguenti problemi: *Dato l'asse maggiore, e 'l minore di un' ellisse : determinare la grandezza di due semidiametri conjugati di essa, che comprendano un angolo dato — O determinare la loro vicendevole grandezza e posizione, dall' esser dato l' angolo, onde uno di essi inclinasi a que' dati assi — Dati gli assi della detta curva, e la grandezza di un semidiametro di essa, ritrovare la grandezza e la posizione del suo conjugato ; etc.*

Un giovane, che istituiscesi in questi Elementi, potrà dal *Trattato Analitico delle curve coniche* rilevare le varie ricerche, che si possono fare in questo argomento, e le diverse difficoltà, che vi s' incontrano. Ed ei, se attentamente il contempli, potrà intendere la ragione, perchè mai in questo *Corso geometrico*, ed in quell' altro *analitico* abbiansi dovuto impiegare artifizi diversi, e quasi incomunicablili fra loro, nel conseguire le medesime verità con eleganza. Ma nella teorica de' diametri conjugati delle iperboli ei vi scorgerà un maggior divario ne' ripieghi euristici, e dimostrativi, che vi si dovranno praticare.

## PROPOSIZIONE XV.

### TEOREMA.

160. I diametri conjugati uguali di un' ellisse inclinansi nel minimo angolo.

Sia l' ellisse ABCD [ *fig.15.* ] di cui sia AC l' asse maggiore BD il minore, e congiunte le AB, AD si bisechino in M, N, saranno le OML, ONK i due semidiametri conjugati uguali, e l'angolo LOK da essi compreso sarà quanto l' altro BAD (140.) : e così pure, preso nel quadrante ellittico BLA un qualunque punto $a$, congiunte le B$a$, $a$D, i semidiametri O$ml$, O$nk$ condotti pe' loro punti medii, $m$, $n$ rappresenteranno due altri semidiametri conjugati, che s' in-

clineranno l' un l'altro nell' angolo $mOn$ uguale a $BaD$, che dovrà esser sempre maggiore di MON, o sia di BAD.

Descrivasi sopra l' asse minore BD il segmento circolare che passi per A, il cui centro sia il punto E nel semiasse maggiore OA dell' ellisse: è chiaro, che condotta per E all' ellisse la semiordinata EGF, che incontri la circonferenza in F, dovrà la EG esser minore della OD, e la OD della EF; e però la EG della EF. Quindi il punto F cadrà al di fuori dell' ellisse; e perciò la circonferenza BPA cadrà al di fuori del quadrante ellittico $BaA$. Si produca dunque la $Da$ in P, e giungasi BP, sarà l'angolo $BaD$ maggiore di BPD(31.*El.I.*) e però anche di BAD (21.*El.III.*): cioè l' angolo $lOk$ sarà maggiore di LOK; laonde questo sarà il minimo.

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

161. Nell'ellisse AMD la sunnormale NH [*f.* 16.] sta ad NC ascissa dal centro, com' è AO parametro dell' asse AD al medesimo asse.

Dim. Si prolunghi l' asse AD, finchè incontri la tangente MQ in R. Sarà, per lo triangolo rettangolo RMH, il quadrato di NM uguale al rettangolo RNH. Ma, per la sottangente RN, il rettangolo AND è uguale all'altro RNC (119 e 135.). Dunque sarà $MN^2$: AND :: RNH : RNC. Or di queste due ragioni la prima è uguale a quella di AO ad AD (122); e la seconda è quanto l' altra di NH ad NC(1.*El.VI.*) Dunque sarà NH : NC :: AO : AD. — *C.B.D.*

## CAPITOLO III.

### Delle tangenti, e seganti dell' ellisse.

### PROPOSIZIONE XVII.

#### Problema.

162. Dato il punto R [*fig.* 17. ] fuori l' ellisse AMD, tirarle da esso una tangente.

Costr. Si unisca il centro della figura col dato punto R, e si trovi la CN terza proporzionale dopo le due CR, CA. Per N distendasi la retta M*m* parallela alla tangente dell'ellisse in A, e si uniscano le rette RM, R*m*; *queste congiunte saranno le tangenti condotte dal punto dato all' ellisse.*

La dimostrazione è chiara dalla prop. II., e dallo scol. 1. prop. VIII.

163. Cor. La retta CR, che unisce il centro dell' ellisse col concorso di due tangenti dovrà dividere per metà la corda distesavi pe' contatti.

### PROPOSIZIONE XVIII.

#### Teorema.

164. Se le due corde FH, QA [*fig.* 18. 19.] dell' ellisse QFH s' incontrino dentro di tal curva, o fuori di essa; i rettangoli FKH, QKA de' loro segmenti saranno come i quadrati delle due tangenti ME, NE parallele ad esse corde.

Dim. S' intendano le tangenti, e le corde prodotte insino

che incontrino in G, Z, P, T i semidiametri CN, CM tirati pe' contatti. E poi per H, A, ove le seganti tagliano la curva, si tirino le SHR, AL parallele alle tangenti NE, ME. Sarà il triangolo PSH uguale al corrispondente quadrilineo NSRZ (123.): sicchè, apponendo loro di comune il sottoposto triangolo SCR, dovrà risultare il trapezio PHRC uguale al triangolo NCZ. E dimostrando in simil modo essere l'altro trapezio LATC uguale allo stesso triangolo NCZ; dovranno i due trapezi PHRC, LATC essere uguali tra loro. Laonde prendendo la differenza di questi trapezi dal comune trapezio PKTC, rimarrà il trapezio HKTR uguale all' altro PKAL.

Ciò premesso, i triangoli simili DHR, DKT sono come i quadrati de' loro lati omologhi DH, DK. Dunque sarà la differenza de' triangoli, cioè il trapezio HKTR al triangolo DKT, come la differenza de' quadrati di DH e di DK, val quanto dire il rettangolo FKH, al quadrato di DK. Ma per la simiglianza de' triangoli DKT, MEZ sta DKT : MEZ :: DK² : ME². Dunque le tre grandezze HKTR, DKT, MEZ sono in ordinata ragione colle altre tre FKH, DK², ME²; onde sarà, *ex aequo*, HKTR : MEZ :: FKH : ME².

In simil guisa dimostrasi, che il trapezio PKAL serbi al triangolo GNE la medesima ragione del rettangolo QKA al quadrato di NE. Per la qual cosa essendo le due ragioni di HKTR ad MEZ, e di PKAL a GNE uguali tra loro, perciocchè il trapezio è uguale al trapezio, e 'l triangolo al triangolo; dovrà eziandio il rettangolo FKH serbare al quadrato di ME la stessa ragione, che ha il rettangolo QKA al quadrato di NE. Onde, permutando, dovrà essere FKH : QKA :: ME² : NE². — *C. B. D.*

165. Cor. 1. *Se due corde di un' ellisse s' intersegliino nel centro della figura* (nel qual caso ciascuna di esse è diametro); *i rettangoli de' loro rispettivi segmenti, cioè i quadrati di cotesti semidiametri, saranno proporzionali a' quadrati delle tangenti parallele ad esse corde.*

166. Cor. 2. E però : *Le due tangenti menate da un medesimo punto ad un' ellisse, non sono sempre uguali fra loro, come avverasi nel cerchio ; ma nella ragione de' diametri ad esse paralleli.*

167. Cor. 3. Inoltre : *Se una corda dell' ellisse seghi due ordinate di un qualunque di lei diametro; i rettangoli de' segmenti di queste ordinate saranno proporzionali a' rettangoli de' corrispondenti segmenti di quella corda.*

168. Cor. 4. Se dal triangolo PSH [ *fig. 19.*] , e dal quadrilineo NSRZ, che sono uguali (123. ) , si tolga il comune trapezio NSHO ; dovrà rimanere il triangolo PNO uguale all' altro trapezio HOZR. Onde potrà conchiudersi, come qui sopra, essere HOZR : MEZ :: FOH : ME². Ma il triangolo PNO sta al suo simile GNE , come NO² ad NE². Dunque sarà FOH : ME² :: NO² : NE² . E permutando il rettangolo FOH , e 'l quadrato di NO saranno come i quadrati delle tangenti ME, NE , o de' diametri ad esse paralleli.

Cioè : *Se da un punto conducansi ad un' ellisse una tangente , ed una segante ; il rettangolo dell' intera segante nella sua parte esterna , e 'l quadrato della tangente , saranno come i quadrati de' diametri , che sono paralleli ad esse rette .*

169. Scol. Se le due corde NO , FT [*fig. 10.*] dell' ellisse ABDE, le quali s' interseghino in P, sieno parallele a' diametri conjugati BE, AD di essa curva , l' addotta dimostrazione non potrà confarsi a questo caso , e gioverà modificarla nel seguente modo. Dal punto P delle loro intersezioni si tiri comunque la segante QPR, e per lo centro C le si distenda la parallela LCF. Sarà il rettangolo NPO all' altro QPR, come BE² ad FL². Ma per la medesima ragione è anche QPR : FPT :: FL² : AD². Dunque sarà , *ex aequo*, NPO : FPT :: BE² : AD².

## PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

170. Se da un punto fuori l' ellisse conducansi due tangenti ad essa curva, ed una qualunque segante; questa segante sarà divisa armonicamente da una tal curva, e dalla retta fra' contatti.

La dimostrazione di questo teorema, è la stessa di quella della prop. XIII. parabola, ove però si avverta, che il rettangolo dell' intera segante, nella sua parte esterna, e 'l quadrato della corrispondente tangente sono tra loro come i quadrati de' semidiametri paralleli a tali rette: quindi basterà solamente eseguir la figura per l' ellisse come la corrispondente nella parabola.

171. Cor. Qui anche si verifica esser divisa armonicamente la retta, che si conduce dall' estremo della segante al punto medio della congiungente i contatti, e poi si distenda insino alla parallela a questa tiratale pel punto fuori l' ellisse.

## PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

172. Se da un punto fuori l' ellisse conducasi ad essa le due tangenti, e due seganti; le congiungenti le intersezioni superiori tra loro, e le inferiori, o saranno parallele alla retta fra' contatti, o concorreranno con essa nello stesso punto.

La dimostrazione è quella della prop. XIV. parabola, eseguendo la figura corrispondente per l' ellisse.

E da tal proposizione potrà anche dedursi il corollario analogo, come si è fatto per la parabola al §. 80.

## PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

173. Se per gli estremi delle seganti un' ellisse, che passino tutte per un punto dato, le si tirino le tangenti; i punti del concorso di queste saranno allogati in una retta data di posizione.

Vedi la dim. della prop. xv. parabola, eseguendo la figura per l' ellisse.

E qui potrà anche supplirsi un corollario analogo a quello del §. 83. per la parabola.

## PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

174. Se dagli estremi A, D [*fig.*20.] di un qualunque diametro AD dell' ellisse AMD si tirino ad essa curva le tangenti AQ, DS, che ovunque incontrino una tangente laterale SQ; il rettangolo delle tangenti verticali DS, AQ sarà sempre uguale al quadrato di CB, semidiametro conjugato di AD.

E quel rettangolo n' è poi un massimo.

Dim. Part. I. Congiungansi le MA, MD, che risulteranno parallele alle CS, CQ da cui sono bisecate in H, K (163). E però, ordinata per M la MN al diametro AD, risulteranno simili tanto i triangoli ANM, CDS, che gli altri DNM, CAQ; e dovrà stare, pe' primi, DS : DC :: NM : NA, e per gli

altri QA ; AC :: MN : ND. Quindi si avrà ancora DS×QA : DC×AC o sia $AC^2$ :: $MN^2$ : AN×ND, cioè come $CB^2$ : $AC^2$. Laonde sarà DS×QA uguale a $CB^2$.

Part. II. Conducasi per M una qualunque altra retta $qMs$, tra le AQ,DS ; starà DS : AQ :: SM : MQ (170.), e però come $Ss$ a $Qq$ : ed il rettangolo di AQ in $Ss$ pareggerà l'altro di DS in $Qq$. Or il rettangolo di $Aq$ in $Ds$ è quanto l'altro di AQ + $Qq$ in DS — $Ss$, cioè quanto gli altri AQ×DS + $Qq$×DS, meno quelli di AQ×$Ss$+$Qq$×$Ss$, e quindi quanto il rettangolo di AQ×DS meno l'altro di $Qq$×$Ss$, per essersi dimostrati uguali gli altri due, che tra loro però si distruggono. Laonde si vede che quel rettangolo di AQ in DS, risultando sempre maggiore di qualunque altro di $Aq$ in $Ds$, sia il massimo.

## PROPOSIZIONE XXIII.

### TEOREMA.

175. Poste le medesime cose della proposizione precedente, il rettangolo SMQ [*fig.* 21.] delle parti della tangente laterale, che restano fra il contatto e le tangenti verticali, adegua il quadrato del semidiametro CG parallelo ad essa tangente laterale.

Ed all' istesso quadrato di CG è pure uguale il rettangolo TMR delle parti della tangente laterale, che sono tra 'l contatto, e gl' incontri de' detti semidiametri conjugati CA, CB.

Dim. Part. I. Le due ragioni di DS ad SM, e di AQ a QM sono uguali fra loro, perchè uguali a quella di CB a CG (166.). Dunque la ragione, ch' emerge dalla loro composizione sarà duplicata di una di esse, o duplicata di quella

di CB a CC : cioè a dire starà DS × AQ : SM × MQ :: $CB^2$ : $CG^2$. Ma si è qui sopra mostrato il rettangolo di DS in AQ uguale al quadrato di CB ; dunque all' altro quadrato di CG dovrà esser uguale il rettangolo di SM in MQ.

Part. II. Inoltre il rettangolo RMT sta all' altro QMS in ragion composta di RM ad MQ , e di MT ad MS : ma di queste due componenti la prima è uguale a quella di RN ad NA , e la seconda pareggia l' altra di NC ad ND. Dunque il rettangolo RMT starà all' altro QMS in ragion composta di RN ad NA, e di NC ad ND ; vale a dire quelle due grandezze saranno come il rettangolo di RN in NC all' altro di NA in ND. Or questi sono ugali fra loro (119, e 135.). Adunque sarà il rettangolo RMT uguale all' altro QMS , o a $CG^2$. — *C.B.D.*

## CAPITOLO IV.

### De' fuochi dell' ellisse.

176. Def. v. *Fuoco di un'ellisse* è quel punto dell'asse maggiore di tal curva, ove l'ordinata, che vi si conduce, è quanto il parametro principale.

177. Scol. Il semiasse maggiore di un' ellisse, il minore, e 'l semiparametro principale sono tre rette continuamente proporzionali, per esser tali i loro doppi. Dunque la terza di quelle grandezze sarà minore della prima. E quindi se nella CB [*fig. 22.*], semiasse minore dell' ellisse ABD, tolgasi dal centro C la CG uguale al semiparametro principale, e per G poi si distenda la NGM parallela all'asse maggiore AD, tal retta dovrà incontrar l' ellisse ne' due punti M, N; e le perpendicolari MF, NV, che da essi tiransi al detto asse, vi segneranno due punti F, V, ciascun de' quali sarà un fuoco. Lo che serve a mostrare la possibilità del definito, e 'l modo ancora di ottenerlo.

178. Cor. Quindi i due fuochi dell' ellisse serbano ugual distanza dal centro di una tal curva.

179. Def. vi. L' *eccentricità* di un' ellisse è la distanza del centro di tal figura da ciascun fuoco di essa.

Cioè a dire ella è dinotata dalla retta CF, o dall'altra CV.

180. Ed un' ellisse si dirà *più*, o *meno eccentrica*, secondochè sia maggiore, o minore il rapporto dell' eccentricità al semiasse. Le ellissi poco eccentriche sono finitime a' cerchi; e le molto eccentriche sono come due parabole uguali, che si riguardino con le concavità loro, ed abbiano per dritto i loro assi assai lunghi.

181. Scol. Le definizioni del *punto di sublimità* dell'ellisse,

della *linea di sublimità*, e de' *rami*, sono quelle stesse, che furono recate nel lib.I., al capitolo de' fuochi della parabola. E poichè i fuochi dell' ellisse sono due (177.); vi saran però eziandio due punti di sublimità S, *s*, e due linee di sublimità SY, *sy*.

## PROPOSIZIONE XXIV.

### TEOREMA.

182. La retta FB [*fig.* 22.], che unisce il fuoco F dell' ellisse ABD con un estremo B dell' asse minore BQ, è uguale al semiasse maggiore AC. E ciò conduce a ritrovare agevolmente i fuochi.

E l' eccentricità CF è media proporzionale tra il semiasse maggiore AC, e la differenza di esso dal semiparametro principale.

Dim. Part. 1. Essendo continuamente proporzionali le tre rette AC, CB, FM, starà $AC^2 : CB^2 :: CB^2 : FM^2$. Ma la prima di queste ragioni è quanto quella del rettangolo AFD al quadrato di FM (144.); dunque sarà $AFD : FM^2 :: CB^2 : FM^2$, e quindi AFD uguale a $CB^2$. Aggiungasi di comune $CF^2$; dovrà emergere $AC^2$ uguale ad $FB^2$, ed AC uguale ad FB. Per la qual cosa, se prendasi per centro un estremo dell' asse minore, e per intervallo il semiasse maggiore della detta ellisse, il cerchio, che si descrive, segnerà nell' asse i due fuochi di essa curva.

Part. II. Dal centro C si tiri la CE perpendicolare alla BF, dovrà stare BF : BC :: BC : BE. Ma è BF uguale ad AC. Dunque sarà BE uguale ad FM. E poichè sta BF : FC :: FC : FE, ne segue che l' eccentricità CF sia media proporzionale tra il semiasse AC, e la FE, ch' è differenza di esso dal semiparametro principale BE, o sia FM.

183. Cor. *Il quadrato del semiasse minore di un' ellisse è uguale al rettangolo delle parti dell'asse segnatevi da ciascun fuoco. E 'l quadrato dell' eccentricità della detta curva, è la differenza de' quadrati del semiasse maggiore, e del minore.*

184. Scol. Si conduca pel vertice A la AT parallela alla FB e sia S il punto di sublimità dell' ellisse, starà (120, e 135) $DS:SA::DF:FA$, e $DS \times SA : SA^2 :: DF \times FA : FA^2 :: CB^2 : FA^2$; e permutando sarà $DS \times SA : CB^2 :: SA^2 : FA^2 :: CA^2 : CF^2$ (118, e 135) $:: CT^2 : CB^2$. E quindi sarà $DS \times SA = CT^2$.

## PROPOSIZIONE XXV.

### TEOREMA.

185. La tangente l' ellisse in un punto, i rami condotti al punto stesso da' due fuochi, e la normale corrispondente sono rette armonicali.

Dim. La tangente NP [*fig.23.*] incontri in P l' asse maggiore AD, cui si ordini dal contatto N la NR, e sieno FN, NV i rami, ed NO la normale pel punto N. Ed essendo $CA : CB :: CB : FM$; si avrà $CA^2 : CB^2 :: CA : FM :: CR : RO$ (161), e convertendo $CA^2 : CF^2 :: CR : CO$, o come il rettangolo PCR all'altro PCO. Quindi sarà $CF^2$ uguale al rettangolo PCO, e $PC : CF :: CF : CO$. Laonde si avrà $PC + CF : PC - CF :: CF + CO : CF - CO$, o sia, per essere CF uguale a CV, sarà $PV : PF :: VO : OF$. Adunque la retta PV sarà divisa armonicamente ne' punti P, F, O, V; e le quattro rette NP, NF, NO, NV saranno armonicali, essendo la tangente alterna con la normale, e l' un ramo con l' altro.

186. Cor. 1. Essendosi dimostrato $CF^2$ uguale a PCO si ha, che:

*L'eccentricità nell'ellisse è media proporzionale tra l' ascissa dal centro CR, corrispondente ad un punto qualunque N, accresciuta della sottangente RP, e la stessa ascissa minorata della sunnormale RO.*

187. Cor. 2. Essendo armonicali le quattro rette NP, NF, NO, NV, e l' angolo PNO delle alterne NP, NO retto; dovrà essere l'angolo PNF uguale all' altro GNV (78). Cioè: *Nell'ellisse, i due rami condotti ad un punto qualunque della curva, s'inclinano egualmente alla tangente per tal punto.*

188. Cor. 3. Dal fuoco V si tiri la perpendicolare VG alla tangente NP, producendola fino ad incontrare l' altro ramo FN in K, sarà la VK bisecata dalla PNG, per esser ciascun degli angoli acuti VNG, KNG uguale allo stesso PNF. Ma è pure la VF bisecata in C. Adunque sarà CG parallela ad FK, o sia al ramo FN. E però: *Se da un fuoco dell' ellisse si meni la perpendicolare ad una di lei tangente, o poi si unisca il centro della figura col punto di una tale incidenza; cotesta retta dovrà esser parallela al ramo tirato al contatto dall' altro fuoco.*

189. E viceversa: *Se dal centro dell' ellisse conducasi la parallela al ramo, che passa per lo contatto, e poi si unisca l' altro fuoco col concorso della parallela, e della tangente; cotesta congiungente dovrà essere perpendicolare alla tangente suddetta.*

## PROPOSIZIONE XXVI.

### TEOREMA.

190. Il rettangolo de' rami NV, NF [*fig.* 23.] condotti ad uno stesso punto dell' ellisse, è uguale al quadrato del semidiametro CL conjugato a quello, che passa pel detto punto.

Dim. I semiassi conjugati CA, CB della proposta ellisse protraggansi insino alla tangente GN di essa curva. Inoltre si meni la CG parallela al ramo FN, e si unisca la VG, che sarà perpendicolare alla tangente PN (189.).

Ciò posto i due triangoli rettangoli PVG, PCQ, avendo di comune l'angolo acuto P, sono equiangoli; onde dovrà essere PV : PQ :: GP : PC. Ma l'è poi GP : PC :: PN : PF, per esser simili i due triangoli PCG, PFN. Dunque sarà PV : PQ :: PN : PF. Il perchè avendo i due altri triangoli PNF, PQV le condizioni della *6.El.VI.*; avranno pure uguali gli angoli PFN, NQV. Ma sono poi uguali gli angoli PNF, QNV (168). Dunque i due triangoli PNF, QNV saranno altresì equiangoli, e simili. Sicchè dovendo essere PN : NF :: NV : NQ; sarà il rettangolo delle medie VN, NF uguale a quello delle estreme PN, NQ, cioè al quadrato di CL (175). — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE XXVII.

### TEOREMA.

191. Se da' fuochi V, F [*fig.* 23.] dell'ellisse AND conducansi, ad un medesimo punto N del perimetro di essa curva, le due rette VN, NF; la somma di questi due rami sarà uguale all' asse maggiore AD.

Dim. Il quadrato delle due VN, NF, considerate come una sola retta, è uguale alla somma de' quadrati di NV, NF una col doppio rettangolo di VN in NF. Dunque sarà uguale alla somma di $2CF^2$, e di $2CN^2$ con $2CL^2$ (*A.El.II*, e 190). Ma la somma de' quadrati de' semidiametri conjugati CN, CL è uguale alla somma de' quadrati de' semiassi conjugati CB, CA (153.). Dunque sarà il quadrato delle due VN, NF, come una sola retta, uguale a $2CF^2$, con $2CB^2$, e con $2CA^2$, cioè a $2CA^2$ con $2CD^2$, essendo $CF^2$ con $CB^2$ uguale a $CD^2$ (182.). E quindi quel quadrato delle due VN, NF sarà uguale a $4CA^2$: e la somma di essi rami VN, NF dovrà pareggiare 2CA, o l' asse maggiore AD. — *C. B. D.*

192. Cor. 1. Essendo FK parallela a CG, ed FV doppia di VC; sarà anche FK doppia di CG. Ma per essere (188.) isoscele il triangolo VNK la NV pareggia la NK, e quindi FK è uguale alla somma de' rami FN, NV, ossia all'asse maggiore AD. Adunque CG sarà uguale al semiasse CA. Cioè:

*La parallela condotta pel centro dell' ellisse ad un de' rami, prodotta fino all' incontro della tangente per l' estremo di questo, è uguale al semiasse maggiore.*

193. Cor. 2. Essendo NO la normale in N; saranno simili i triangoli FNO, CVG, e quindi starà FN:FO::CG:CV; cioè:

*Il ramo sta a quella parte dell' asse, ch'è tra il fuoco, e la normale pel suo estremo, come il semiasse maggiore all' eccentricità.*

194. Cor. 3. Ed essendo CG sempre uguale al semiasse maggiore CD, per qualunque posizione della tangente, e retto l' angolo VGN, ne segue, che:

*La circonferenza del cerchio circoscritto all' ellisse è il luogo geometrico degl' incontri delle perpendicolari tirate da' fuochi sulle tangenti di essa curva.*

194. (*bis*) Cor. 4. Quindi tirata dall'altro fuoco F la FH perpendicolare alla tangente in N, [*fig. 24.*], e congiunta la HC, producansi le HC, VG, finchè s' incontrino in T; ed essendo uguali, e simili i triangoli HCF, VCT, sarà CT uguale a CH; e quindi il punto T si apparterrà pure alla circonferenza del cerchio circoscritto all' ellisse. Or i due lati HT, GT del triangolo HGT iscritto nel cerchio ATG, comunque varii la posizione del terzo lato HG, che tocca l' ellisse, passan sempre per gli stessi punti C, V. Adunque:

*Se due lati di un triangolo variabile iscritto in un cerchio passino continuamente per due punti fissi, l' un de' quali sia centro del cerchio, e l' altro un punto dentro di esso; il terzo lato toccherà sempre un' ellisse concentrica al cerchio, avente per asse maggiore il diametro di questo, e l'altro punto per fuoco.*

## PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

195. Se ad un qualunque punto N [*fig.* 25.] dell' ellisse AND conducansi il ramo FN, e la normale NO; e dal punto O, ove la normale incontra l' asse, si tiri la OE perpendicolare al detto ramo: la parte NE, che da questo quella ne tronca verso la curva, sarà uguale al semiparametro principale.

Dim. Si ordini la NR all'asse AD, e pel centro C dell' ellisse tirinsi le CQ, CG rispettivamente parallele alle NR, NF; sarà l' angolo QCG uguale all' altro FNR, e l' angolo QGC uguale a PNE: che però (congiunta la RE) essendo l'angolo PNE uguale ad NRE; poichè il cerchio descritto dal diametro NO toccando in N la retta NP, dee passare per E; sarà pure l'angolo QGC uguale ad NRE. Laonde risultando simili i triangoli QCG, NRE, si avrà CG : CQ :: RN : NE, ed il rettangolo di RN in CQ, cioè $CB^2$ (118, e 135), sarà uguale all' altro di CG, o CA in NE; e quindi essendo CA : CB :: CB : NE; dovrà la NE pareggiare il semiparametro principale — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

196. Se da' fuochi F, V [*fig.* 24.] dell' ellisse AND si abbassino le perpendicolari FH, VG ad una qualunque di lei tangente HNG; il rettangolo di queste perpendicolari sarà sempre uguale al quadrato del semiasse minore CB.

E 'l rettangolo de' rami FN, NV [*fig.* 25.], tirati al contatto N, serberà al quadrato della normale NO la costante ragione dell' asse maggiore al parametro di esso.

Dim. Part. i. Poichè il cerchio descritto dal diametro AD [*fig.24.*] dee passare per H, e G (193), e che la FH è uguale alla VT; sarà il rettangolo di FH in VG quanto l'altro in TV in VG, o sia di AV in VD, e però uguale a $CB^2$ (183.).

Part. ii. Essendo l'angolo HNF [*fig.25.*] uguale all'altro EON, (come si ha dalla dimostrazione del teorema precedente); il triangolo NEO rettangolo in E sarà simile al triangolo FNH rettangolo in H, e con ciò anche simile all' altro VGN (187.). Or dalla similitudine de' triangoli FNH, NEO rilevasi essere FN : FH :: NO : NE; e per la simiglianza degli altri due VGN, NEO dee stare VN : VG :: NO : NE. Dunque (componendo queste due analogie) si avrà il rettangolo di FN in VN al rettangolo di FH in VG, o al quadrato di CB, che gli è uguale (*part.1.*), come il quadrato di NO al quadrato di NE. Onde sarà, permutando, $FN \times NV : NO^2 :: CB^2 : NE^2$. Ma $CB^2$ sta ad $NE^2$, come l' asse maggiore al suo parametro (195, *e* 146). Adunque sarà eziandio il rettangolo de' rami FN, NV al quadrato della normale NO, come l' asse maggiore al suo parametro. — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE XXX.

### TEOREMA.

197. Nell' ellisse il ramo FR [*fig.* 26.] è quanto la semiordinata condotta all' asse pel suo estremo, e distesa insino alla tangente, che procede dal punto di sublimità verso lo stesso ramo. Cioè a dire FR è uguale a PN.

E lo stesso ramo FR sta alla perpendicolare RG, che dal suo estremo si tira sulla SG linea di sublimità della curva, come l'eccentricità al semiasse.

**Dim. Part. i.** La tangente SN incontri in H, T le tangenti DH,AT tirate all' ellisse dagli estremi dell' asse maggiore; sarà la ragione di SD ad SA uguale a quella di DH ad AT, pe' triangoli simili HDS, AST. Ma la stessa ragione di SD ad SA è anche uguale a quella di DF ad FA (170.). Dunque sarà DH:AT :: DF : FA, e quindi $DH\times AT:AT^2::DF\times FA:FA^2$. Ma i rettangoli di DH in AT, e di DF in FA sono uguali fra loro (174.183.). Dunque sarà pure $AT^2$ uguale ad $FA^2$, ed AT uguale ad FA. Inoltre il rettangolo di LN in NR sta al quadrato di NM, come il quadrato di AT, o della sua uguale AF a quello di TM (166, 168.); e sta poi $AF^2:TM^2::FP^2:NM^2$. Dunque sarà $LNR:NM^2::FP^2:NM^2$; e quindi LNR sarà uguale ad $FP^2$. Ed aggiungendo ad essi di comune $PR^2$, sarà $PN^2$ uguale ad $FR^2$; e PN uguale ad FR.

**Part. ii.** Le rette FR, RG sono respettivamente uguali alle PN, PS; dunque sarà FR : RG :: PN : PS. Ma pe' triangoli simili PSN, SCQ sta PN a PS, come CQ, o la sua uguale CA a CS (182 *e part. prec.*). Ed è CA : CS :: CF : CA (162.). Dunque starà benanche FR:RG::CF:CA.—*C.B.D.*

## PROPOSIZIONE XXXI.

### TEOREMA.

198. Se dagli estremi di due rami conducansi le tangenti; la retta, che unisce il fuoco dell' ellisse col concorso di queste tangenti, divide per metà l' angolo compreso da' medesimi rami.

La dimostrazione di questo teorema è la stessa di quella,

che fu recata alla proposizione XXI. della parabola ; e basterà solamente il descrivere la figura per l'ellisse con le medesime lettere che quella per la parabola , e modificarvi la dimostrazione nel luogo ove dice : *essendo questi rami uguali a quelle perpendicolari.* Dovendo per l'ellisse dirsi : *essendo questi rami proporzionali a quelle perpendicolari.*

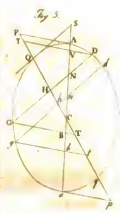
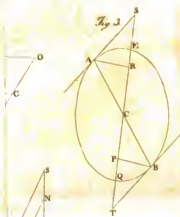
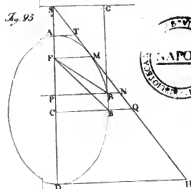
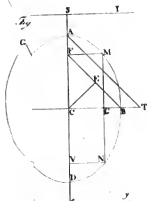
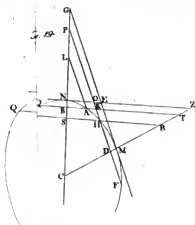
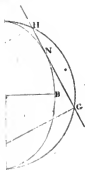
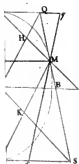
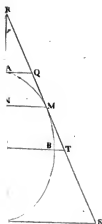
199. Cor. In questa curva si possono anche dedurre, come si è fatto nella parabola , le verità seguenti. I. Cioè : *Se dagli estremi di una corda condotta per un fuoco dell' ellisse si tirino a questa curva due tangenti ; il concorso loro sarà allogato nella linea di sublimità .* II. *E ad una tal corda dovrà essere perpendicolare la retta, che unisce il detto fuoco col concorso delle medesime tangenti.*

*Fine del libro secondo.*

Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 8
Fig. 12
Fig. 14

Fig. 19

Fig.

Fig. 95

DELLE

# SEZIONI CONICHE

## LIBRO TERZO

## DELL' IPERBOLE.

### CAPITOLO I.

De' diametri delle iperboli opposte.

#### PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

200. Nell'iperbole AN$a$ [*fig.* 1.] il quadrato di una qualunque semiordinata NM sta al rettangolo AMD delle ascisse d' amendue i vertici A, D, come il lato retto AB al trasverso AD, cioè come il parametro al diametro.

Ed i quadrati di due semiordinate NM, *nm*, sono tra loro come i rettangoli AMD, A$m$D delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici.

La dimostrazione di questo teorema può leggersi in quella della proposizione 1. dell' ellisse, con riscontrare la figura citata.

201. Def. 1. Si dice *centro* dell' iperbole AN$a$ il punto medio C del lato traverso AD di essa curva.

E si dirà *surregolatrice* la parallela CF, che da un tal centro si conduce alla regolatrice BD della stessa curva.

202. Cor. 1. Il quadrato di una qualunque semiordinata MN dell' iperbole ANn è duplo del trapezio AMPF, che ne aggiunge al triangolo ACF la MP perpendicolare ad MA. (115.). Onde starà $MN^2$ ad $mn^2$, come il trapezio AMPF all' altro AmpF.

203. Scol. Non pur dalla genesi dell' iperbole, ma dalla seconda parte di questa proposizione ben si comprende, che i rami curvilinei di cotesta curva debbano divergere all'infinito non meno tra loro, che dal diametro, che in mezzo ad essi producesi all' in giù indefinitamente. Inoltre le anzidette ascisse non sono segmenti del diametro, quali erano nell' ellisse, ma ne sono i suoi producimenti. Ed esse diconsi *dal vertice*, per distinguerle da quelle che computandosi dal centro diconsi però *dal centro*.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

204. Se dal centro dell' iperbole ANQ [*fig.* 2.], tolgasi nel semidiametro CA la parte CP, terza proporzionale dopo un' ascissa CM presavi dal centro, e 'l detto semidiametro: la retta che unisce l' estremo di quella parte troncata con un estremo dell' ordinata corrispondente alla detta ascissa, sarà tangente di cotesta sezione.

E l' angolo del contatto iperbolico non sarà divisibile per una retta.

La dimostrazione di questo teorema può leggersi nella pro-

posizione 2. dell' ellisse, con osservare la figura citata.

205. Cor. 1. Qui può anche rilevarsi, che stia PM : MA :: MD : MC. E che debba pur essere PD : DM :: PA : AM.

206. Cor. 2. E s' intenderà di leggieri qual artifizio di Geometria abbiasi a praticare, per condurre la tangente all' iperbole ANQ, per un dato punto della detta curva, il quale non istiavi nel vertice. Che se in tal vertice ne abbisogni condurre la tangente, basterà distendere per esso la parallela ad una sottoposta ordinata.

207. Cor 3. *Il diametro dell' iperbole prodotto insino ad un' ordinata è diviso armonicamente dalla curva, e dalla tangente condottale per un estremo di essa ordinata.*

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

208. Tutte le tangenti dell' iperbole ANQ [*f.* 2.] concorrono col suo diametro AD sotto del centro C. E se dal detto centro conducasi ad un punto N [*fig.* 3.] dell' iperbole ANQ la retta CN, questa retta dovrà cadere entro la sezione; nè potrà segare altrove una tal curva; ma si bene l'opposta sezione.

Dim. Part. i. [*fig.* 2.]. Nel cor. 1. del teorema precedente si sono dimostrati uguali i due rettangoli DMA, CMP; dunque siccome il primo di essi è minore di CM$^2$(6.*El.*II.); così sarà anche l' altro CMP minore dello stesso CM$^2$: quindi MP sarà minore di CM, e 'l punto P del concorso della tangente NP; e del diametro AD dovrà cadere sotto del centro di tal sezione.

Part. ii. La retta CN [*fig.* 3.] non potendo esser tangente dell' iperbole ANQ, per quel che si è detto nella parte 1, dee cadere entro tal curva. Nè poi può incontrarla in un qual-

che altro punto Q. Imperocchè, se ciò sia vero, s' intendano condotte pe' punti N, Q le semiordinate NM,QR al diametro AD dell' iperbole. Sarà NM : QR :: CM : CR, pe' triangoli simili NMC, QRC ; e quindi ancora $NM^2 : QR^2 :: CM^2 : CR^2$. Ma per la natura di questa curva l'è anche $NM^2 : QR^2$ :: DMA : DRA. Dunque sarà eziandio $CM^2 : CR^2$ :: DMA DRA, e con ciò $CM^2 : CR^2 :: CM^2 - DMA : CR^2 - DRA$ :: $CA^2$ ; $CA^2$. Laonde sarebbe $CM^2$ uguale a $CR^2$, ch' è un assurdo.

Inoltre si tagli la retta C*m* uguale all' altra CM, ed ordinata la *mn* al diametro AD, si congiunga la C*n*. E poichè la differenza de' quadrati delle CM , CA è quanto la differenza degli altri di C*m*,CD ; saranno pure i rettangoli DMA,A*m*D, che disegnano quelle differenze, tra se uguali ; e quindi anche i due quadrati di NM, e di *nm* , che son proporzionali ad essi rettangoli , dovran pareggiarsi : e sarà la retta NM uguale all' altra *nm*. Dunque i due triangoli NCM , *n*C*m* dovranno avere gli angoli MCN , *m*C*n* tra se uguali . Onde dovrà stare la CN per dritto colla C*n* . E con ciò la segante CN, che conducesi dal centro dell' iperbole ad un punto del perimetro di essa curva , dovrà tagliare l' opposta sezione nel prolungar quella retta all' insù del centro della curva. — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

209. La retta AB [*fig*. 4. I , che passando per lo centro C delle iperboli opposte AE, BQ, si arresta nelle convessità loro, dee restar divisa per metà nel detto centro.

E le tangenti AS, BT, che da' suoi estremi conduconsi ad esse curve, debbono esser parallele.

Dim. Si legga la dimostrazione della prop. III. dell' ellisse, con riscontrare la figura quassù citata

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

210. Se da un qualunque punto G [ *fig*.5. ] del perimetro iperbolico AQG conducansi le due rette GN, GB rispettivamente parallele alla tangente laterale QS, ed alla verticale AP; il triangolo NGB, ch' esse comprendono col diametro delle sezione, sarà uguale al corrispondente quadrilineo TBAP.

Dim. Veggasi la figura quì indicata, con leggere la dimostrazione della prop. IV. dell' ellisse.

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

211. La segante CH [ *fig*.6. ], che passa per lo centro C dell' iperbole AQG, dee dividere per metà tutte le corde, che dentro ad essa giaccion parallele alla tangente QS.

Onde la retta CH sarà un altro diametro delle sezione, il quale ha per sue ordinate le proposte corde.

Dim. Cas. I. Conducansi al diametro A*a* pe' punti G, D, le semiordinate GB, DV, che incontrino la segante CH ne' punti T, Y; e queste cadano primieramente a parti opposte del diametro A*a*: sarà il triangolo GNB uguale al quadrilineo APTB (*prop. prec.*); e tolto lo spazio comune THNB, reste-

rà il triangolo THG uguale allo spazio APHN ; e quindi al triangolo DHY , per essere anche il triangolo DVN uguale al quadrilineo PAVY. Adunque essendo uguali i triangoli simili THG , DHY , sarà HD uguale ad HG.

Cas. II. Che se le ordinate GB , DV [ *fig.5.*] cadano dalla stessa parte del diametro A*a*, allora dal triangolo GNB, e dal quadrilineo APTB , che gli è uguale, tolto lo spazio comune THDVB , resteranno i due triangoli THG , DVN, presi insieme, uguali al triangolo DHY col quadrilineo PAVY, che essendo uguale al triangolo DVN,sarà il solo triangolo THG uguale al triangolo DHY, che gli è pur simile ; e perciò sarà pure HG uguale ad HD.

212. Cor. 1. Nell' iperbole , oltre al lato trasverso assegnatole dalla sua genesi per sezione , si possono concepire infiniti altri diametri , che passan tutti per lo centro di tal curva .

213. Cor. 2. La retta, che unisce il centro dell' iperbole col punto medio d' una di lei corda , dee incontrar tal curva in quel punto, ove la tangente che le si conduce è parallela alla detta corda . E ciò può dimostrarsi colla guida del §. 129.

214. Cor. 3. Si descriva un cerchio , che abbia per centro il punto medio del lato traverso, e per intervallo una retta maggiore della metà del detto lato : di poi si tiri la corda per le sezioni d' una delle due iperboli opposte, e si unisca il detto centro colla metà di questa corda. La congiungente, distesa d'ambe le parti, sarà l' asse dell' iperbole : per essere perpendicolare ad essa corda,e quindi alle tangenti della curva pe' suoi estremi . Ed i due punti , ove l' asse incontra le iperboli opposte si diranno i *vertici principali* di esse curve.

## PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

215. I quadrati delle semiordinate ad un qualunque diametro dell' iperbole sono fra loro come i rettangoli delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici.

Dim. Qui si potrà dimostrare, come nell' ellisse, che sia il triangole GHT [*fig.6.*] uguale al trapezio QHNS, o che nell' opposta sezione il triangolo *ght* sia uguale al suo corrispondente trapezio *qhns*. E collo stesso ragionamento potrà rilevarsi, che sia il triangolo EFR uguale al trapezio QFMS. Dunque dovrà essere GHT : EFR :: QHNS : QFMS. Ma i primi due termini di quest' analogia, cioè i triangoli simili GHT, EFR, sono come i quadrati de'loro lati omologhi GH, EF; ed i trapezi QHNS, QFMS, che ne sono i termini rimanenti sono proporzionali a' rettangoli $q$HQ, $q$FQ (124.). Dunque sarà $GH^2 : EF^2 :: q$HQ : $q$FQ.

Ed essendo, per la medesima ragione, il triangolo GHT all' altro *ght*, come il trapezio QHNS al trapezio *qhns*; sarà pure $GH^2 : gh^2 :: q$HQ : Q$hq$; essendo la prima di queste due ragioni uguale a quella de' triangoli, e l' altra uguale alla ragione de' trapezi. —*C.B.D.*

## PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

216. Se da un punto di un qualunque diametro dell'iperbole gli si elevi la perpendicolare, terza proporzionale dopo l' ascissa, e la semiordinata corrispondenti a quel punto; l' estremo di detta per-

pendicolare sarà allogato in una retta data di posizione, che dicesi *regolatrice* della proposta curva.

La dimostrazione di questo teorema può leggersi in quella della proposizione VII. dell' ellisse, descrivendo la figura corrispondente.

## PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

217. Nell' iperbole, il quadrato della semiordinata a qualunque diametro sta al rettangolo delle ascisse d' amendue i vertici, com' è al detto diametro il suo parametro.

La dimostrazione di questo teorema può leggersi nella proposizione VIII. dell' ellisse, con adattarvi la figura corrispondente.

218. Scol. 1. Cotesta proprietà essenziale dell' iperbole, che nel primo di questi teoremi erasi dimostrata pel lato trasverso di essa curva, qui vedesi convenir del pari ad ogni altro diametro dell' iperbole. Onde tutto quello, che in conseguenza di tal principio n' è stato fin qui dedotto, potrà convenevolmente per ogni altro diametro aver luogo.

219. Scol. 2. Le definizioni della *sottangente* nell' iperbole relativa a' diametri, e della sunnormale, sono identiche a quelle per l' ellisse (136.), e per la parabola (58, e 59.).

### PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

220. Ogni diametro dell' iperbole, qualora incontri una di lei tangente, e l' ordinata per lo contatto, dee restar diviso armonicamente dalla curva, e dalla detta ordinata.

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella della prop. IX. dell' ellisse; ond' ella quivi potrà leggersi, con eseguire la figura corrispondente.

221. Cor. Allorchè un semidiametro dell' iperbole, il quale sia segato da una di lei tangente, protraggasi insino all' ordinata per lo contatto, *debbono esser continuamente proporzionali l' ascissa del centro, il detto semidiametro, e quell' ascissa diminuita della sottangente.*

### PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

222. Nell' iperbole la sunnormale MH [*fig.* 2.] sta all' ascissa MC dal centro, come AO parametro dell' asse AD al detto asse.

Dim. Si legga la dimostrazione della prop. XVI. dell' ellisse, e si riscontri la figura quì citata. E 'l parametro dell' asse si chiami *parametro principale*.

223. Cor. 1. All' asse DA dell' iperbole ANQ si elevi, dal vertice A, la perpendicolare AO uguale al parametro del detto asse, e si tiri la regolatrice DO, e la surregolatrice CF; sarà MH : MC :: AO : AD :: MS : MC, pe' triangoli simili ADO, MSC. Onde dovrà essere MH uguale ad MS.

224. Cor. 2. Dunque in generale : *le surregolatrici relative agli assi delle curve coniche sono i luoghi delle loro sunnormali.*

225. Def. ii. Se dal centro C [*fig.* 7. ] dell' iperbole GAK conducasi la CP parallela ad una di lei tangente, e media proporzionale tra 'l semidiametro CA , che passa per lo contatto , e 'l semiparametro di esso ; una tal retta si dirà *semidiametro secondario* di CA. E la CA si direbbe *semidiametro primario* rispetto alla CA.

226. Cor. 1. Si distenda il semidiametro AC verso *a*, sicchè C*a* adegui CA ; e similmente si prolunghi l' altro semidiametro PC in E , finchè sia CE uguale a CP : l' intero A*a* si dirà diametro *primario*, o *principale* rispetto a PE; e questo , *diametro secondario* di A*a* .

227. Cor. 2. Ed essendo il rettangolo *a*FA al quadrato di GF, come il diametro A*a* al suo parametro, o come il semidiametro AC alla metà del detto parametro ; sarà anche il rettangolo AF*a* al quadrato di GF, come il quadrato del semidiametro primario AC a quello del suo secondario CP.

## CAPITOLO II.

### Degli assintoti delle iperboli.

228. Def. iii. Una retta dicesi *assintoto* di una curva, se protraendo all'infinito coteste due linee, che siano convergenti tra loro, l'una non può mai incontrar l'altra, ma può sì bene accostarlosi per un intervallo minore di qualunque dato.

229. Cor. 1. Dunque la convergenza assintotica di due linee dee racchiudere i seguenti caratteri. L'impossibilità di convenire l'una di queste due linee coll'altra, per quanto si protraggano insieme verso quella parte, ove convergono. E'l possibile di loro avvicinamento per un intervallo minore di qualunque dato.

230. Cor. 2. E quindi due rette, che sieno parallele, non possono essere tutte due assintoti di una medesima curva. Imperocchè, se quella di tali rette, che sia più vicina alla curva, suppongasi esserne un assintoto; l'altra non potrà mai appressarsi alla curva per un intervallo minore della distanza di esse parallele. Onde non avrà il secondo carattere dell'assintotico convergimento. E se la più rimota dalla curva sia assintoto di essa; l'altra, che l'è più d'accosto, dovrà incontrarla.

### PROPOSIZIONE XII.

#### Teorema.

231. Se in qualunque tangente BD [*fig.* 8.] dell'iperbole GAK, si prendano di quà e di là dal contatto le parti AB, AD respettivamente uguali al

semidiametro secondario di quello, che passa per lo medesimo contatto; le rette CB, CD, che si conducono dal centro dell' iperbole agli estremi D, B di quelle parti, saranno assintoti della proposta iperbole GAK, e della sua opposta *gak*.

Dim. Per un punto qualunque K del perimetro iperbolico GAK, si tiri l' ordinata KG al diametro A*a*, ed essa poi si distenda insino alle rette CD, CB. Sarà per la natura di questa curva il quadrato di GF al rettangolo AF*a*, come $AB^2$ ad $AC^2$, e come $FH^2$ ad $FC^2$, pe' triangoli simili CAB, CFH. E quindi, *per la 19.El.V.*, sarà il rettangolo HGL ad $AC^2$, come $AB^2$ ad $AC^2$; onde dovrà essere il detto rettangolo HGL uguale al quadrato di AB. Ma per quanto sia grande la GL base del rettangolo HGL, il quale dee pareggiare il quadrato di AB, non può mai svanire la GH altezza di esso. Dunque non potrà la retta CH incontrare il ramo iperbolico AG in alcun punto.

Inoltre la $\omega$ sia una retticcinola di una qualunque piccolissima grandezza; e poi tra l' assintoto CL dell' iperbole GAK, e 'l semidiametro CAF di essa curva si applichi, parallela ad AD, la FL terza proporzionale dopo la retticciuola $\omega$, e la DA; starà FL : AD :: AD : $\omega$. E per essersi più sopra dimostrato che il rettangolo LGH pareggi $AD^2$; sarà pure LG : AD :: AD: HG. Ma la prima ragione di quest' analogia è maggiore della prima della precedente, cioè sta LG ad AD in maggiore ragione di FL ad AD. Dunque sarà benanche la ragione di AD ad HG maggiore di quella di AD ad $\omega$; e quindi HG minore di $\omega$. Per la qual cosa la retta CH dee essere assintoto del ramo iperbolico AG. E così pure si dimostrerà, che sia l' altra CL assintoto dell' altro ramo AK; e che amendue le rette CH, CL distese all' insù diventino assintoti dell' iperbole opposta *gak* — *C. B. D.*

232. Cor 1. Niuna parallela alla CH può essere un assintoto del ramo iperbolico AG (230.). E nemmeno può concepirsi, che una retta divergente, o convergente colla CH sia assintoto del detto ramo curvilineo. E lo stesso dicasi dell' altro ramo AK, e di que' due dell' opposta sezione.

233. Cor. 2. Dunque le due iperboli opposte GAK, *gak* non possono avere altri assintoti, che le sole rette *b*H, *d*L.

234. Scol. Essendosi dimostrato in questo teorema, essere assintoto di un ramo iperbolico la retta che unisce il centro di tal curva coll' estremo di una di lei tangente, fattasi uguale al semidiametro secondario di quello che passa per lo contatto, ognuno potrebbe da ciò incautamente inferire esser infiniti di numero gli assintoti di una stessa iperbole. Ma essi non son che due, cioè quelli, che abbiamo quassù stabiliti; poichè gli estremi delle infinite tangenti nel detto modo condizionate debbonsi allogare in que' due soli assintoti, come abbondevolmente sarà chiarito nel seguente teorema, ch' è converso del già proposto.

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

235. Se ad un qualunque punto A [*fig*. 9.] dell' iperbole SAR, rinchiusa tra i suoi assintoti CL, CN, si conduca la tangente BAO; ciascuna parte di questa che resta tra il contatto, e l'assintoto che incontra, sarà uguale al semidiametro secondario di quello, che passa per lo contatto.

Dim. Se AB non sia uguale al semidiametro secondario di CA, si tagli A*b* uguale ad esso semidiametro secondario e si unisca C*b*. Dovrà esser questa retta assintoto del ramo iperbolico AS. Dunque il ramo AS avrà per assintoti le rette CB, C*b*. Lo che ripugna (233) — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

236. Se per un punto S [*fig.*9.] di un iperbole si tiri una segante, che incontri gli assintoti di essa; il rettangolo di quelle sue parti, che restano fra la curva e gli assintoti, sarà uguale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa segante.

Dim. Cas. I. Quì può verificarsi, che la segante LSN incontri in due punti l' iperbole SAR. E può anche addivenire, che un' altra segante condotta per S incontri le due sezioni opposte. Nel primo caso la corda SR si divida per metà nel punto $a$. Si unisca cotesto punto col centro C dell' iperbole per la retta C$a$; ed una tal congiungente si distenda insino all' iperbole P$qo$; sarà $q$A quel diametro di essa curva al quale la corda SR n' è un' ordinata (213.). Ed oltre a ciò la tangente condotta alla medesima curva per lo punto A dovrà esser parallela alla SR, ed uguale al semidiametro secondario di CA (235.). Onde potrà dimostrarsi come nella prop. XIII, che sia il rettangolo LSN uguale al quadrato di BA, cioè del semidiametro secondario di CA.

Cas. II. La retta SQ incontri in S, P le sezioni opposte SAR, P$qo$. E dal centro C di esse curve si meni la CA parallela alla SP, e poi per S si distenda la retta LSN parallela alla BA tangente dell' iperbole SAR in A. Ciò posto, per lo parallelismo delle rette MS, AC, e delle altre LS, BA, i triangoli LMS, BCA sono simili; onde dovrà stare LS : SM :: BA : AC. Ma è pure il triangolo NSQ simile all' altro AOC; e però sta NS ad SQ, come AO, o la sua uguale BA ad AC. Quindi il rettangolo LSN starà al rettangolo QSM, come $BA^2$ ad $AC^2$ (23. *El. VI.*]. Ma il primo rettangolo

è uguale a BA² (*cas.1.*). Dunque sarà eziandio QSM uguale ad AC². — *C.B.D.*

237. Cor. 1. Nella stessa guisa può dimostrarsi il rettangolo MPQ uguale al quadrato di CA, e con ciò al rettangolo QSM. Dunque, dividendo la QM ugualmente in F, sarà FP² — FQ² uguale ad FS² — FM². E quindi FP uguale ad FS, e QP uguale ad MS. Laonde:

*Se per un punto qualunque del perimetro iperbolico conducasi una segante, che incontri in due punti la stessa iperbole, o le opposte sezioni, ed essa poi si distenda insino agli assintoti; le sue parti, che restano fra la curva e gli assintoti, saranno sempre tra loro uguali.*

## PROPOSIZIONE XV.

### TEOREMA.

238. L' angolo assintotico BCD [*fig.*8.] è retto, ottuso, o acuto, secondo che l'asse primario A*a* dell' iperbole sia uguale, minore, o maggiore del suo secondario PE.

Dim. Suppongasi il semiasse principale CA uguale al semiasse secondario CE, o alla tangente verticale AB (235.); sarà isoscele il triangolo BAC. Quindi l' angolo ACB sarà semiretto. E dimostrando esser benanche semiretto l'altro ACD, l'è forza, che sia retto l'intero angolo assintotico BCD composto da' due semiretti ACB, ACD.

Che se CA sia minore di CE, o di AB, l' angolo CBA sarà minore dell' altro ACB. Ma tutti e due debbono fare un retto; perciocchè il triangolo CAB è rettangolo in A. Dunque l' angolo ACB sarà piucchè un semiretto; e quindi il suo doppio BCD sarà maggiore di un retto, cioè ottuso.

Finalmente qualor si ponga CA maggiore di CE o di AB,

con simile ragionamento si dedurrà, che sia l'angolo ACB minore di un semiretto, e che quindi BCD suo duplo debba esser minore di un retto, e con ciò acuto. — *C.B.D.*

239. Cor. *La retta, che unisce l' un de' vertici principali delle iperboli opposte col loro centro, divide per metà l' angolo assintotico.*

240. Def. iv. L' iperbole, il cui asse principale adegua il suo secondario, dicesi *equilatera*, o *parilatera*: ed ella direbbesi *scalena*, se i medesimi assi sien disuguali

241. Def. v. Gli assintoti diconsi *ortogonali*, o *rettangoli*, se comprendono un angolo retto.

242. Cor. Dunque, se un' iperbole è parilatera i suoi assintoti saranno ortogonali, e *viceversa*.

243. Def. vi. Se dal vertice principale di un' iperbole si conduca la parallela ad un assintoto, la quale poi si distenda insino all' altro; il quadrato di una tal retta si dirà *potenza* dell' iperbole rapportata a' suoi assintoti: ed essa retta ne sarà il suo lato.

Così il quadrato della AE [ *fig. 10.* ], che dal vertice principale A dell' iperbole AF*f* conduccsi parallela all'assintoto CD, è la potenza dell'iperbole AF, ed AE il suo lato.

244. Cor. Per lo punto A si tiri AH parallela a CE, la figura AECH, che ne risulta, sarà un rombo: per essere l'angolo ACE uguale all' altro ACH (239.). E tanto sarà il quadrato di AE, che il rettangolo di AE in EC.

245. Def. vii. Se da qualunque punto F dell' iperbole AF*f* si meni la FB parallela all' assintoto CD, che tagli in B l' altro assintoto CG, essa retta si dirà *ordinata dell'iperbole tra gli assintoti*, e CB la sua *ascissa corrispondente*.

246. Def. viii. Se l' assintoto CL [*fig*.9.] dell' iperbole RAS incontri una di lei tangente BO, la parte BK del detto assintoto, la quale resta tra la tangente, e l' ordinata AK condottagli dal contatto, si dirà *sottagente* dell' iperbole rapportata a' suoi assintoti.

247. Cor. 1. Essendo BA uguale ad AO, sarà BK uguale a KC. Dunque:

*Nell' iperbole tra gli assintoti la sottangente è uguale all' ascissa, che le corrisponde.*

248. Cor. 2. Laonde se per lo punto B dell' assintoto CB dell' iperbole RAS voglia condursi la tangente a questa curva; si dividerà in parti uguali la BC in K, ed ordinata per K alla detta curva la KA, si unirà la BA. Questa retta sarà la tangente richiesta.

## FROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

249. Il rettangolo contenuto da un'ordinata dell' iperbole tra gli assintoti nella corrispondente ascissa, è sempre uguale alla potenza dell' istessa iperbole.

Dim. Sia FB [*fig*.10.] una qualunque ordinata all' iperbole AF tra gli assintoli CD, CG; il vertice principale della medesima curva sia il punto A, e per F, A si distenda una retta insino a' detti assintoti; sarà il rettangolo DAG uguale all' altro DFG (236.); e quindi sarà DA : DF :: FG:AG. Ma per lo parallelismo delle tre rette DC, AE, FB, sta DA : DF :: CE : CB; e per la similitudine de' triangoli FBG, AEG è pure FG : AG :: FB : AE. Dunque sarà CE : CB

## CAPITOLO III.

### De' diametri conjugati delle iperboli.

### PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

252. Gli estremi de' diametri secondari dell' iperbole GAK [*fig.* 11.], tra gli angoli assintoti CH, CL debbonsi allogare in un' altra iperbole, con lo stesso centro, e co' medesimi assintoti, però nell' angolo HC*l* supplementale di HCL, e che ha ancora la stessa potenza.

Dim. Sia CA un qualunque semidiametro primario dell' iperbole GAK, CB il secondario corrispondente, che sarà parallelo alla tangente PAQ dell' iperbole GAK nel punto A, ed uguale ad AP, o AQ (235.). Compiasi il parallelogrammo ACBP, e vi si tiri la diagonale AB, che dovrà rimaner bisecata in E dall' assintoto CH, e risultar parallela all' altro assintoto CL, essendo anche parallelogrammo la figura ABCQ. Or sieno CD, CF i semiassi conjugati dell' iperbole GAK: congiunta la FD questa risulterà anche parallela all' assintoto CL, e bisecata in I dall' altro CH. Laonde essendo il rettangolo di AE in EC uguale al quadrato di DI lato della potenza dell' iperbole GAK; sarà pure il rettangolo di BE in EC uguale ad FI²; ed il punto B si apparterrà all'iperbole BFR della potenza FI² uguale ad ID², e tra gli assintoti HC, C*l*, comprendenti l' angolo HC*l* supplemento dell' angolo HCL. — *C.B.D.*

253. Cor. 1. L' altra iperbole BFR ove allogansi gli estre-

mi di tutt' i semidiametri secondari dell' iperbole GAK, e della sua opposta *gak*, avrà ancora la sua opposta *bfr*, che le sarà identica. E se prendansi esse per le iperboli principali, i loro diametri verranno ad allogarsi co' loro estremi nelle iperboli proposte GAK, *gak*. Ed è chiaro che le une di tali iperboli venghino ad avere per asse primario quello ch' è secondario per le altre.

254. Def. ix. Le iperboli in cui sono allogati i diametri secondari di due iperboli opposte diconsi conjugate di queste.

E vicendevolmente queste sono le conjugate di quelle.

255. Cor. Adunque esse sono descritte intorno ad uno stesso centro, al quale rivolgono la loro convessità.

Ed esse hanno ancora gli stessi assintoti condizionati come nella proposizione precedente è stato dimostrato, ed una medesima potenza.

256. Scol. Le quattro iperboli conjugate rivolgono al comun centro loro le convessità: e ciascuno degli otto rami di queste curve, che si è detto estendersi all' infinito, è assintotico a quell'altro, che gli è d' accosto. Ma non è così dell' ellisse, tutto che ella sia una curva affine all' iperbole. Imperocchè le parti del perimetro ellittico riguardano colle loro concavità il centro della figura: esse formano una curva continua; e questa poi ritorna in se stessa, ed acquistasi la forma di un' ovale.

## PROPOSIZIONE XVIII.

### TEOREMA.

257. Sia AD [*fig*. 12.] un qualunque diametro delle iperboli opposte DT, AF, cui si tiri ovunque la parallela TF, che le incontri in T, F: dico

che il suo diametro secondario BE debba dividerla in due parti uguali.

E se cotesta parallela seghi una delle iperboli conjugate QEP; la parte QP, ch' è dentro di tal curva, sarà puranche divisa per metà dallo stesso diametro secondario.

**Dim. Part. i.** Si tiri al diametro AD non meno l' ordinata TK, che l' altra FG: queste rette saranno parallele fra loro, e la figura GKTF dovrà essere parallelogrammo; onde i lati opposti TK, FG saranno uguali fra loro. Ed essendo i rettangoli AKD, DGA come i quadrati di TK, e di FG (215.); siccome questi sono tra loro uguali, così il dovranno essere ancor quelli. Laonde aggiungendo a' medesimi rettangoli AKD, DGA gli uguali quadrati di CD, e di CA, risulterà il quadrato di CK uguale all' altro di CG, e CK uguale a CG. Or a queste rette CK, CG sono uguali le HT, HF respettivamente, come lati opposti de' due parallelogrammi CKTH, CGFH. Adunque HT sarà uguale ad HF.

**Part. ii.** Sieno impertanto C$q$, C$p$ gli assintoti delle iperboli opposte DT, AF, che saranno eziandio assintoti della conjugata PEQ (255.). Sarà tanto la T$q$ uguale alla F$p$, che la Q$q$ alla P$p$ (237.): e quindi anche la TQ dovrà pareggiare la FP. Laonde, se queste rette si tolgano respettivamente dalle uguali HT, HF, avanzerà HQ uguale ad HP.— *C.B.D.*

258. Def. x. Due diametri dell' iperbole si dicono *conjugati fra loro*, se ciascuno di essi sia parallelo alle ordinate dell' altro.

259. Cor. 1. Ogni diametro primario dell' iperbole, e 'l suo secondario sono conjugati fra loro.

260. Cor. 2. E quindi il parametro DN del diametro DA potrà defininirsi essere la terza proporzionale in ordine al detto diametro, ed al conjugato di esso.

261. Scol. Ed è facile vedere, che se un punto qualunque del perimetro dell' iperbole congiungasi con gli estremi del diametro primario; le rette condotte dal centro a' punti medii di tali congiungenti saranno due diametri conjugati.

## PROPOSIZIONE XIX.

### TEOREMA.

262. Poste le medesime cose della prima parte della precedente proposizione, il quadrato di TH [*fig.* 12.] semiordinata al diametro secondario BE, sta alla somma de' quadrati di CH ascissa dal centro, e di CE semidiametro secondario, come il quadrato del semidiametro primario CD a quello del detto secondario CE.

Dim. Il rettangolo AKD sta al quadrato di KT, come il quadrato di CD a quello di CE (227.). Dunque sarà la somma del rettangolo AKD e del quadrato di CD, cioè il quadrato di CK, alla somma de' quadrati di KT e di CE, come $CD^2$ a $CE^2$. Vale a dire dovrà essere $TH^2 : CH^2 + CE^2 :: CD^2 : CE^2$. — *C.B.D.*

263. Cor. E conducendo un' altra semiordinata $th$ al medesimo diametro BE di essa curva, si dimostrerà nello stesso modo esser $th^2 : Ch^2 + CE^2 :: DC^2 : CE^2$. Onde potrà conchiudersi, che:

*I quadrati delle semiordinate ad un diametro secondario dell' iperbole sien proporzionali a' quadrati delle loro ascisse dal centro, accresciuti del quadrato del semidiametro secondario.*

264. Scol. Dee da ciò conchiudersi, che non avendo luogo per le ordinate ad un diametro secondario la stessa proprietà che per quelle ad un primario (215.); tutte le

altre proprietà dell'iperbole per un diametro primario, che da queste derivano, non sieno in generale identicamente applicabili al diametro secondario. E ciò era necessario avvertire.

## PROPOSIZIONE XX.

### TEOREMA.

265. Nell' iperbole il semiasse che corrisponde al suo vertice è 'l minimo de' semidiametri.

DIM. Dal centro C [*fig.13.*] dell' iperbole GAK, col raggio uguale al semiasse CA, che va al suo vertice A, si descriva il cerchio DAN; questo non potrà incontrar l' iperbole in altro punto, ma dovrà toccarla in A, ove tali due curve hanno la perpendicolare LA*l* all' asse CA per loro tangente comune: e però ogni punto R della curva GAK cadendo al di fuori della circonferenza DAN, ed al di sotto della LA*l*, congiunto col centro C, dovrà la CR esser maggiore della CP, e quindi della CA. — *C.B.D.*

266.. Scol. 1. Descrivendo dal centro C col raggio CR, che sia un qualunque semidiametro dell' iperbole GAK, l'arco circolare R*r*, congiungasi la C*r*; è chiaro che la CA dovrà bisecare la retta R*r* ad angoli retti, e quindi risulterà la CR uguale alla C*r*, e l' angolo RCA uguale all' altro *r*CA. Adunque:

*I semidiametri dell' iperbole ugualmente inclinati al semiasse sono tra loro uguali; e viceversa.*

Ed è ancor facile il vedere ch' essi vadano crescendo a misura che cresce l' angolo di loro inclinazione con l' asse.

267. Scol. 2. E poichè l' iperbole parilatera è identica alla conjugata, ne segue, che i semidiametri di esse ugualmente inclinati a' loro rispettivi assi sieno uguali.

## PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

268. Il parallelogrammo HQME [*fig*. 14.], che si compie da' due semidiametri conjugati HQ, HE delle iperboli AQ, BE, è uguale al rettangolo de' semiassi conjugati HA, HB.

Dim. Essendo la retta QM uguale, e parallela alla HE semidiametro conjugato di QH, il punto M dovrà trovarsi in HM assintoto comune delle due iperboli conjugate AQ, BE (235.). E così pure si mostrerà esser l'altro punto L nel medesimo assintoto HM. Or poichè le rette QE, AB, che uniscono gli estremi di que' due semiassi, sono parallele all' altro assintoto HC (252. *dim*.), il triangolo HFQ sarà uguale all' altro HTA (251.). Dunque, prendendo i loro quadrupli, risulterà il parallelogrammo HQME, che compiesi da' semidiametri conjugati HQ, HE, uguale al rettangolo HALB de' semiassi conjugati. — *C.B.D.*

269. Cor. 1. E da ciò può inferirsi, che ogni parallelogrammo iscritto in tutti quattro i rami iperbolici sia di una costante grandezza, cioè quanto il rettangolo degli assi conjugati.

270. Cor. 2. Se pe' punti Q, B si distendano le YX, BZ respettivamente parallele alle rette AL, EM, e si congiunga la QB; sarà il parallelogrammo HYXB uguale all'altro HQZV. Imperocchè il primo è duplo del triangolo HQB, con cui n' è sulla stessa base HB, e tra le medesime parallele HB, YX. E 'l secondo dello stesso triangolo è ancor duplo, per essere amendue sulla medesima base HQ, e fra le stesse parallele HQ, BZ.

271. Cor. 3. Dunque starà il parallelogrammo HYXB all' altro HALB, come il parallelogrammo HQZV all' altro

HQME. Cioè HY : HA :: HV : HE. Ma sta HV : HE::HB : HR :: HS : HB (204, e 207.). Quindi sarà HY : HA :: HS : HB.

272. Cor. 4. Ed essendo HA : HB :: HY : HS, ed $HA^2$ : $HB^2$ :: $HY^2$ : $HS^2$; sarà eziandio $HA^2$ : $HB^2$ :: $aYA^2$: $b$SB (19.*El.V.*). Ma l'è poi $HA^2$ : $HB^2$ :: $a$YA : $QY^2$. Sicchè sarà $a$YA : $b$SB :: $a$YA : $QY^2$, e però $b$SB uguale a $QY^2$. E così può anche rilevarsi, che il quadrato di SE adegui il rettangolo $a$YA. Adunque :

*Se dagli estremi di due semidiametri conjugati di un' iperbole conducansi due semiordinate agli assi della curva; questi saran da quelle divisi proporzionalmente. E 'l rettangolo di cotesti due segmenti in ciascun asse dovrà pareggiare il quadrato di quella delle semiordinate, che al medesimo asse è parallela.*

## PROPOSIZIONE XXII.

### TEOREMA.

273. Nelle iperboli AG, DF [*fig.* 15.] i quadrati de'due diametri conjugati GF, PM tanto differiscono fra loro, quanto i quadrati degli assi DA, RQ.

Dim. Il quadrato della retta CB, il quale è uguale al quadrato di CA, ed al rettangolo DBA (6.*El. II.*), dee uguagliare i quadrati di CA, e di MN (272.). Dunque il quadrato dell' ipotenusa CG, che pareggia i quadrati de'cateti CB, BG, sarà uguale a' tre quadrati di CA, di MN, e di BG.

In simil guisa può dimostrarsi, che il quadrato di CM adegui i tre quadrati di CQ, di GB, di MN. Laonde la differenza de'quadrati di CG, e di CM sarà quanto l'altra de'tre quadrati di CA, di MN, , e di BG da' tre quadrati di CQ,

di GB, e di MN, cioè a dire quanto il solo quadrato di CA differisce da quello di CQ: e quindi, quadruplicando i termini, sarà la differenza de' quadrati de' diametri conjugati uguale alla differenza de' quadrati degli assi. — *C. B. D.*

274. Cor. 1. Dunque: *Se un' iperbole abbia due diametri conjugati tra se uguali; dovrà avere tutti gli altri diametri respettivamente uguali a' loro conjugati.*

275. Cor. 2. E quindi: *Tutti i diametri dell' iperbole parilatera sono respettivamente uguali a' loro conjugati.*

*E saran pure i medesimi diametri respettivamente uguali a' loro parametri* (260.).

*Ed il quadrato di ciascuna semiordinata ad un di questi diametri sarà uguale al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici.*

276. Cor. 3. Inoltre: *il quadrato di qualunque semiordinata ad un diametro secondario di questa iperbole, sarà poi uguale alla somma de' quadrati del semidiametro secondario, e dell' ascissa dal centro* (262.).

## PROPOSIZIONE XXIII.

### TEOREMA.

277. Se dagli estremi N,$n$ [*fig.* 16] di un qualunque diametro N$n$ dell'iperbole parilatera QNP, si tirino ad un qualunque punto Q di essa curva le due rette QN, Q$n$; gli angoli QN$n$, Q$n$N alla base dell' emergente triangolo NQ$n$ avranno sempre per differenza l'angolo delle coordinate per tal diametro.

Dim: Si tiri per Q la semiordinata QL al diametro N$n$; dovrà il quadrato di questa risultare uguale al rettangolo $n$LN (274.); e però essere $n$L ad LQ come LQ ad LN, e quindi simili i triangoli QLN, QL$n$ (6. *El. VI.*), con aver l' angolo

LQN uguale all' altro $LnQ$ : ma l' angolo $QNn$ è uguale agli angoli NQL, NLQ (32.*El.I.*). Adunque sarà esso uguale agli angoli $LnQ$, NLQ : e tolto di comune l' angolo $LnQ$, rimarrà la differenza degli angoli $QNn$, $QnN$ quanto l' angolo NLQ. — *C. B. D.*

278. Cor. Quindi i vertici di tutt'i triangoli che hanno una data differenza di angoli alla base sono allogati in un' iperbole parilatera che ha quella data base per diametro, e per angolo delle coordinate quella differenza, del pari che per la data somma di quegli angoli, la locale sarebbe una porzione di cerchio descritta su quella base, e capiente l' angolo supplementale del dato.

## PROPOSIZIONE XXIV.

### TEOREMA.

279. Nell' iperbole equilatera gli angoli ai centri son supplementi degli angoli compresi dalle tangenti nelle estremità de' diametri corrispondenti. Vale a dire l' angolo AOC [*fig.*17.] è supplemento dell' angolo contenuto delle tangenti in A, C.

Dim. Producansi le tangenti BA, BC fino agli assintoti in D, ed E; i triangoli OAD, OCE risulteranno isosceli (235 e 274); e quindi saranno tra loro uguali i due angoli ADO, AOD, al pari degli altri due COE, CEO. Or nel triangolo BOE, l'angolo esteriore FOE è uguale ai due CBO, CEO; adunque sarà pure eguale ai due CBO, COE. Nel modo stesso si vedrà risultare l' angolo FOD uguale ai due ABO, AOD; e però l' angolo retto EOD (238.) pareggerà i quattro angoli CBO, ABO, COE, AOD, ossia i tre angoli ABC, COE, AOD : sicchè se aggiungasi di comune un altro angolo EOD, si avranno due angoli retti uguali all'angolo ABC co' tre an-

goli AOD, DOE, COE, ossia quanto i due angoli ABC, AOC. E però l'angolo AOC è supplemento dell' altro ABC. — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE XXV.

### TEOREMA.

280. Nelle iperboli parilatere i diametri perpendicolari l' un l' altro sono uguali.

DIM. Sieno le iperboli parilatere GAK, *gak* [*fig.18.*], e le loro conjugate MBN, *mbn*, che saranno pure parilatere, ed identiche alle proposte; e ad un diametro D*d* di quelle iperbolì insista perpendicolarmente l'altro E*e*, sarà l' angolo ECD uguale all' altro BCA, e tolto di comune l'angolo BCD, rimarrà l' angolo ECB uguale a DCA. E però i due diametri DC*d*, EC*e* inclinandosi ugualmente agli assi CB, CA delle due iperboli identiche GAK, MBN, saranno uguali.

281. COR. Or se dal centro C, intervallo CE si descriva il cerchio EFD, segnerà questo nell' iperbole MBN un altro punto F, al quale corisponde il diametro FC*f* uguale ad EC*e* (266.), e che dovrà essere il conjugato di DC*d*, poichè ad esso uguale (274.). E sarà questo un mezzo facilissimo da assegnare, nell' iperbole parilatera, il diametro conjugato ad un dato.

## PROPOSIZIONE XXVI.

### PROBLEMA.

282. Dati di grandezza i due semidiametri conjugati HQ, HE [*fig.14.*] dell' iperbole AQ, e l' angolo ch' essi comprendono; determinarne i semiassi conjugati.

**Costruz.** Si compia il parallelogrammo HQME dalle date rette QH, HE, e vi si conducano le diagonali HM, QE. Inoltre dal punto H si meni la HK parallela alla diagonale QE, e media proporzionale tra le metà delle anzidette diagonali; e divisi per metà gli angoli KHL, LH*e* per le rette HA, HB, si tiri pel pnnto K la parallela KA alla diagonale HM; e poi per lo punto A, ove qnella incontra la retta HA, si distenda la AB parallela alla KH. *Saranno HA, HB i semiassi addimandati.*

**Dim.** Essendo le rette HQ, HE due semidiametri conjngati della richiesta iperbole, la diagonale HM del parallelogrammo HEMQ, che compiesi da essi, sarà un assintoto di tal curva (252.*dim.*); e l' altro sarà la retta HK condotta dal punto H parallela all' altra diagonale EQ. Ed oltre a ciò i semiassi conjugati della detta iperbole dovranno ritrovarsi nelle rette HY, HS, che dividono per metà gli angoli KHL, *e*HL (239.). Ma essendo la HK media proporzionale tra le HF, FQ, ella dee essere il lato della potenza della richiesta iperbole (249.); e la retta KA, che dal punto K condncesi parallela ad HF, dee segnare nella retta HY il vertice principale A della detta iperbole. Dnnque sarà HA il semiasse principale di tal curva. E tirando per A la AB parallela alla HK, sarà HB il semiase conjngato. — *C.B.D.*

283. **Cor.** Che se fossero dati gli assintoti, ed un punto Q dell' iperbole ch' è tra essi; ecco in qnal modo si potranno determinare gli assi. Dal pnnto Q si meni la QF paral-
» lela alla HK; e fatta la FM ugnale alla FH, si uniscano
« le rette MQ, QH, e si compia il parallelogrammo HQME.
» Saranno le HQ, HE dne semidiametri conjugati dell' i-
» perbole richiesta: e i due semiassi potran rinvenirsi per
» la proposizione precedente.

## CAPITOLO IV.

### Delle tangenti, e seganti dell' iperbole.

### PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA.

284. Per un dato punto fuori l' iperbole condurre una tangente ad essa curva.

Cas. I. Se il punto dato stia in uno de' due assintoti delle proposte iperboli, s' intenderà dal §.248. qual artifizio debba impiegarsi a tal uopo, e su quale delle dette curve debba cadere la tangente, che si domanda.

Cas. II. Se il dato punto R stia dentro l' angolo assintotico CHP [*fig.19.*], col seguente artifizio si otterrà l' intento. Si tiri la retta HR dal centro H della data iperbole al dato punto R, ed ella poi si distenda all' ingiù, finchè la HN sia terza proporzionale dopo le HR, HA. E condotta per N nella detta iperbole la corda M*m* parallela alla tangente di essa curva in A, si uniscano le due rette RM, R*m*. Queste saranno le tangenti addimandate.

Del pari che fu fatto per l' ellisse, la dimostrazione di questo caso potrà ricavarsi dalla proposizione II. e dallo scol. 1. prop. IX.

Cas. III. Finalmente nel doversi condurre la tangente all' iperbole MA [ *fig.20.* ] dal punto T, che sia fuori l' angolo assintotico KCH, dovrà praticarsi il seguente artifizio. Si tiri la retta TCO, per lo centro C dell' iperbole AM, e per lo dato punto T. E dallo stesso centro conducasi la CA al punto medio di una corda di detta curva, parallela alla TC: ed in A poi si meni la tangente QA*q* all' iperbole AM,

producendola in sino al di lei assintoto CH. Inoltre presa la CO terza proporzionale dopo le CT, AQ, si meni per O la OM parallela alla CA, che incontri in M, *m* le iperboli opposte, e si uniscano le rette TM, T*m*. Dico esser *queste le tangenti, che richieggonsi.*

Dim. Imperocchè, se mai la retta M*t* diversa dalla MT potesse toccare in M l'iperbole MA, ordinata la MN al diametro DA, sarebbe come $AQ^2$ a $CA^2$, così $MN^2$ a DNA, o a CN*r* (205.). Ma il quadrato di MN sta al rettangolo CN*r* nella ragion composta da quelle di MN, o pure OC a CN, e di MN ad N*r*, o della sua uguale di C*t*.a C*r*, per esser simili i due triangoli MN*r*, C*tr*. Dunque sarà $AQ^2 : CA^2 :: OCt : NCr$; e quindi, siccome è $CA^2$ uguale ad NC*r*, per la tangente M*t*, così dovrebb' essere OC*t* uguale ad $AQ^2$. Ma per la costruzione è $AQ^2$ uguale ad OCT. Dunque sarebbero tra loro uguali i rettangoli OC*t*, OCT; ch' è un assurdo. E così potrebbesi benanche dimostrare, che la T*m* sia tangente dell' iperbole opposta D*m*.

285. Cor. 1. Ciascuna tangente dell' iperbole tronca da' due semidiametri conjugati, e verso il centro della figura, due parti, che hanno i seguenti simmetrici valori. La prima di esse, qual sarebbe la CR, è terza proporzionale in ordine all' ascissa corrispondente all' ordinata per lo contatto, ed al semidiametro primario, cioè in ordine alle CN, CA, come fu dimostrato nel §. 221. e l' altra CT è *anche terza proporzionale dopo la semiordinata* NM *per lo contatto, e 'l semidiametro secondario* CB.

286 Cor. 2. Se diasi un punto fuori di un' iperbole, si potrà dai casi quassù rapportati rilevare, se due tangenti possan condursi da quel punto alla detta curva, o una sola: e quando niuna tangente potrà pervenirle da quel punto.

287. Cor. 3. La retta, che unisce il centro delle iperboli col concorso di due tangenti dee dividere per metà la retta, che congiunge i due contatti.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

### TEOREMA.

288. Se da un punto preso fuori di un' iperbole cadano sulla medesima curva, o sulle opposte sezioni due tangenti; queste saranno nella ragione de' semidiametri conjugati a quelli che passano pe' loro contatti.

Dim. Cas. i. Dal punto Q [ *fig.21* ] cadano sulla stessa iperbole AM le due tangenti QA , QM , e da' punti A , M si tirino le semiordinate AF , MN a' diametri che passano pe' contatti M , A. Dovrà esser CR : CA :: CA : CN (221.), e CO : CM :: CM : CF. Ma distendendo le dette tangenti insino a' semidiametri conjugati di CA, e di CM, è poi , per lo parallelismo delle rette MR , AF , CR : CA :: CM : CF :: CO : CM . Dunque le due rette CN , CF saranno similmente divise ne' punti R ed A , O ed M. Si avranno quindi le due analogie RA : NR :: OM : FO , RA : RC :: OM : OC ; e componendole risulterà $RA^2$ : NRC :: $OM^2$ : FOC.

Ciò premesso, per la similitudine de'triangoli RAQ,RNM sta AQ : NM :: RA : RN ; e per la simiglianza degli altri due RAQ , CRT sta pure AQ : CT :: RA : RC . Dunque componendo queste ragioni , sarà il quadrato di AQ al rettangolo di NM in CT , o al quadrato di BC, che gli è uguale (285.), come $AR^2$ ad NRC. E dimostrando in simil modo essere $QM^2$ : $CG^2$ :: $OM^2$ : FOC ; sarà $AQ^2$ : $CB^2$ :: $QM^2$ $CG^2$; cioè AQ : CB :: QM : CG . E permutando AQ : QM :: CB : CG.

Cas. ii. Sieno SM , SD le tangenti condotte da S alle iperboli opposte AM,D*d* ; sarà chiaro dover esser le due rette SM , DN similmente divise ne' punti T, R , Q , e negli altri C, R, A. Dunque sarà SM : MQ :: DN : NA. Ma si è

dianzi dimostrato, che stia DN ad NA, come DR ad RA (205.), o come DS ad AQ. Dunque sarà SM : MQ :: DS : AQ; e permutando SM ad SD, come MQ ad AQ, o come CG a CB. — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE XXIX.

### TEOREMA.

289. Se le due corde QA, FH [*fig.* 22. e 23.] dell' iperbole QHF s' incontrino dentro di tal curva, o fuori di essa; i rettangoli FKH, QKA de' loro segmenti saranno come i quadrati delle tangenti parallele ad esse corde.

Dim. Per intender la verità proposta in questo teorema potrà leggersi la dimostrazione della proposizione XVIII. dell'ellisse, con osservare le corrispondenti figure dianzi citate, e con avvertire, che quì dal triangolo CSR debbansi togliere il triangolo PSH, e 'l trapezio NSRZ, che furon dimostrati nel §.210. tra loro uguali.

290. Cor. 1. Di quì potrà dimostrarsi come nell' ellisse, ed in convenevol modo, che:

*Se da un medesimo punto cadano in un' iperbole una tangente ed una segante; il rettangolo dell' intera segante nella sua parte esterna, e 'l quadrato della tangente, sieno come i quadrati de' diametri, che son paralleli ad esse rette.*

291. Cor. 3. *E se una corda di un' iperbole intersegli due ordinate di un qualunque diametro di essa; i rettangoli de' segmenti di queste ordinate saranno proporzionali a' rettangoli de' corrispondenti segmenti di quella corda.*

## PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

292. Se da un punto fuori l' iperbole conducansi ad essa curva due tangenti, ed una qualunque segante; cotesta segante sarà divisa armonicamente da una tal curva, e dalla retta fra' contatti.

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella della prop. XIII. della parabola.

## PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

293. Se da un punto fuori l' iperbole cadano in essa due tangenti, e due seganti, tirata la retta fra' contatti, e le altre due per le sezioni superiori, e per le inferiori respettivamente; queste tre rette saranno fra loro parallele, o dovran concorrere ad uno stesso punto.

La dimostrazione dell' enunciato teorema può farsi come quella della prop. XIV. della parabola.

## PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

294. Se da un qualunque punto preso dentro l'iperbole si distenda, come piaccia, una corda, e pe' suoi estremi conducansi le tangenti ad una tal curva; il concorso di dette tangenti dovrà allogarsi in una retta data di posizione.

Questa dimostrazione può farsi come quella della proposizione XV. della parabola.

## PROPOSIZIONE XXXIII.

### TEOREMA.

295. Se dagli estremi A, D [*fig.*24.] di un qualunque diametro AD dell' iperbole MA, si tirino ad essa curva le tangenti AQ, DS, che ovunque incontrino una di lei tangente laterale MS; il rettangolo delle tangenti verticali DS, AQ sarà uguale al quadrato di CB semidiametro conjugato a CD.

E quel rettangolo n' è poi un massimo.

Si riscontri la dimostrazione della prop. XXII. ellisse sulla figura soprindicata.

## PROPOSIZIONE XXXIV.

### TEOREMA.

296. Poste le medesime cose della proposizione precedente, il rettangolo SMQ [*fig.*24.] delle parti della tangente laterale, che restano fra il contatto, e le tangenti verticali, adegua il quadrato del semidiametro CG parallelo ad essa tangente laterale.

Ed allo stesso quadrato di CG è pure uguale il rettangolo TMR delle parti della tangente laterale, che sono tra il contatto e gl' incontri de' detti semidiametri conjugati.

Leggasi la dimostrazione della proposizione XXIII. dell' ellisse, con osservare la figura soprindicata.

## PROPOSIZIONE XXXV.

### TEOREMA.

297. Le perpendicolari tirate da' vertici ai lati di un triangolo iscritto nell'iperbole parilatera, o tra le due opposte, concorrono ad uno stesso punto dell' una di esse.

Dim. Sia CE [*fig.25.*] una di tali perpendicolari, che dal vertice C dell' un angolo BCD di questo triangolo iscritto nel modo suddetto, si è tirato al lato opposto BD; e prodottala, se bisogna, in F, sino all' iperbole opposta FK, si congiunga la DF, che incontrisi con la BC in Q.

Ed essendo il rettangolo BED all' altro FEC, come il quadrato del semidiametro parallelo a BD al quadrato del semidiametro parallelo ad FE; e questi semidiametri dovendo risultar perpendicolari l'un l' altro, del pari che il sono le BD, FE, e quindi uguali (280.); sarà perciò il rettangolo BED uguale all' altro FEC; ed FE : ED :: EB : EC. Laonde i triangoli FED, BCE saranno simili (6. *El. VI.*); e però l' angolo BCE o pure FCQ sarà uguale all' angolo FDE. Risulteranno quindi equiangoli i triangoli FED, FQC; e l' angolo FQC sarà retto al pari dell' altro FED, o sia la DF tirata dall'altro vertice D del triangolo BCD perpendicolarmente al lato opposto BC concorre con la EC in un punto F dell' iperbole FK. Similmente si dimostra che a tal punto concorra ancora la BH perpendicolare al terzo lato DC di quel triangolo, tiratagli dal vertice dell'angolo opposto B. — *C. B. D.*

## CAPITOLO V.

### Dei fuochi dell' iperbole.

298. Def. xi. Fuoco dell' iperbole è quel punto dell' asse primario, pel quale l' ordinata corrispondente è quanto il parametro principale.

299. Scol. 1. Di qualunque grandezza sia il parametro principale di un iperbole esso potrà sempre (203.) adattarsi come ordinata all' asse primario, tanto nell' una, che nell' altra delle due iperboli opposte [ *fig.26.* ] Or sieno Mm, Nn queste due ordinate uguali al parametro; l' uno, e l' altro de' punti F, V sarà un fuoco, e per essere FM uguale a VN, sarà (257. *dim.*) CF uguale a CV. Dunque, come l' ellisse, l'iperbole ha pure *due fuochi*; uno però per ciascuna delle due opposte sezioni: ed essi sono equidistanti dal centro C.

300. Scol. 2. Per le definizioni dell' *eccentricità*, e de' *rami*, come ancora de' due *punti*, e delle due *linee* di *sublimità* veggansi i §§. 181, e 182.

### PROPOSIZIONE XXXVI.

#### Teorema.

301. La retta AB, che unisce gli estremi de' semiassi conjugati CA, CB è uguale all' eccentricità CF.

E la stessa eccentricità è media proporzionale tra il semiasse primario, e lo stesso semiasse accresciuto del suo semiparametro.

Dim. Part. i. Qui può dimostrarsi come nell' ellisse (182.)

che sia il rettangolo AFD uguale al quadrato del semiasse conjugato CB ; sicchè agginnto di comnne $CA^2$ , risulterà $CF^2$ uguale ad $AB^2$, e quindi CF uguale ad AB . Laonde se dal centro C , col raggio AB, si descriva il cerchio ; questo segnerà nell' asse primario i due fuochi F , V.

Part. ii. Si elevi ad AB la perpendicolare BE ; starà AC : CB :: CB : CE ; e quindi sarà ( 260.) CE il semiparametro di CA ; essendo poi $AB^2$ uguale ad EAC , ed AB uguale a CF ; sarà pure $CF^2$ uguale ad EAC ; e però la CF media proporzionale tra il semiasse CA , e lo stesso CA accresciuto del suo semiparametro CE. — *C. B. D.*

302. Cor. 1. *Nell' iperbole il quadrato del semiasse conjugato è uguale al rettangolo delle due distanze dell' un fuoco da' due vertici principali.*

## PROPOSIZIONE XXXVII.

### TEOREMA.

**303. La tangente NP , i due rami NF, NV , e la normale NO , corrispondenti ad uno stesso punto N [*fig.*27.] dell' iperbole, sono quattro rette armonicali .**

La dimostrazione si farà come quella della propos. xxv, ellisse, tenendo presente la figura citata e cambiando solo il *convertendo* in *componendo*.

304. Cor. 1. E sarà pure $CF^2 = CO \times CP$ ; cioè :
*L' eccentricità è media proporzionale tra l' ascissa dal centro* CR *corrispondente ad un punto qualunque* N , *diminuita della sottangente* RP, *e la stessa ascissa accresciuta dalla sunnormale* RO .

305. Cor.2. Inoltre dall' essere armonicali le quattro rette NO , NF , NP , NV , e retto l' angolo PNO , si conchiu-

deranno (78.) uguali gli angoli PNF, PNV; cioè, che: *I due rami condotti ad un punto qualunque dell'iperbole s'inclinano ugualmente alla tangente in questo punto*.

306. Cor. Tirata da un fuoco V la VG perpendicolare alla tangente NP, e prodottala in K, fino al ramo FN, si vedrà essere NV uguale ad NK, VG uguale a GK, e CG parallela a KF, ossia ad FN; vale a dire, che: *Se da un fuoco dell' iperbole si tiri la perpendicolare ad una di lei tangente, e si unisca il punto d' incidenza col centro; la congiungente sarà parallela al ramo tirato al contatto dall' altro fuoco*.

307. E viceversa: *Se dal centro dell' iperbole si tiri la parallela al ramo, che passa pel contatto, e si unisca l' altro fuoco col punto d' incontro della parallela, e della tangente; la congiungente risulterà perpendicolare alla tangente medesima*.

## PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

308. Il rettangolo de' rami NV, NF [*fig*.27.], condotti ad uno stesso punto N dell' iperbole, è uguale al quadrato del semidiametro CL conjugato al semidiametro CN, che passa pel punto stesso.

Si riscontri la dimostrazione della prop. XXVI. ellisse sulla figura citata.

## PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

309. La differenza de' due rami NV, NF [*fig.* 27], condotti ad uno stesso punto N dell'iperbole, è uguale all' asse primario AD.

Dim. Essendo (306.) NV ugnale ad NK; sarà KF la differenza de' rami, che si bisechi in S.

Ciò posto, poichè KN è divisa comunque in F, sarà (7.*El.II.*) $KF^2$ con $2KN \times NF$, ossia (308.) $KF^2$ con $2CL^2$ uguale ad $NF^2$ con $NK^2$, cioè ad $NF^2$ con $NV^2$, o pure (*A.El.II.*) a $2CF^2$ con $2CN^2$; laonde, prendendo la metà di queste grandezze, sarà $2KS^2$ uguale a $CF^2$ con $CN^2$ meno $CL^2$. Ma è (301.) $CF^2$ uguale a $CA^2$ con $CB^2$: ed in oltre (273.) $CN^2$ meno $CL^2$ uguale a $CA^2$ meno $CB^2$; quindi risulterà $2KS^2$ uguale a $2CA^2$, e KS uguale a CA: e prendendone i doppi sarà 2KF, differenza de' rami, uguale ad AD, asse primario dell' iperbole. — *C.B.D.*

310. Cor. 1. Essendo (306.) KF parallela a CG, sarà però doppia di CG, per essere VF doppia di VC; quindi sarà CG uguale al semiasse CA, cioè:

*La parallela tirata pel centro dell'iperbole ad un de' rami, prodotta fino alla tangente per l' estremo del ramo stesso, è uguale al semiasse primario.*

311. Cor. 2 Ciò posto essendo simili i triangoli FNO, CVG, si ha FN : FO :: CG, o CA : CV; vale a dire:

*Un ramo sta alla parte dell' asse primario, ch' è tra 'l fuoco d'ond'èi parte, e la normale per l'altro suo estremo, come il semiasse primario all' eccentricità.*

312. Cor. 3. Inoltre, qualunque sia la posizione della tangente NG, essendo sempre CG uguale al semiasse primario CA, ne risulta, che:

*La circonferenza del cerchio concentrico all' iperbole, che*

*ha per diametro l' asse primario di questa curva, è il luogo degl' incontri delle perpendicolari tirate da' fuochi sulle tangenti della curva stessa.*

313. Cor. 4. Se dunque da' fuochi F, V si tirino ad una tangente qualunque le perpendicolari FH, VG [*fig.28.*]; i punti H, G si troveranno allogati nella circonferenza del cerchio descritto dal centro C, col raggio CA.

314. Scol. Si unisca la HC, e si produca fino ad incontrare in T la VG. Per l'uguaglianza de' triangoli simili FCH, VCT, si conchiuderà esser CH uguale a CT; e quindi che il punto T cada ancora in quella circonferenza di cerchio. Ma i due lati HT, GT del triangolo HGT iscritto nel cerchio, comunque varii la posizione del terzo lato HG, tangente l'iperbole, passan sempre pe' medesimi punti C, V. Adunque:

*Se due lati di un triangolo variabile iscritto in un cerchio passino continuamente per due punti fissi, l' un de' quali sia il centro, e l' altro un punto esteriore al cerchio; il terzo lato sarà continuamente tangente ad un' iperbole concentrica al cerchio, avente per asse primario il diametro del cerchio medesimo, che passa per l'altro punto, e questo punto per fuoco.*

## PROPOSIZIONE XL.

### TEOREMA.

315. Se ad un qualunque punto N [*fig.*29] dell' iperbole BN conducasi il ramo FN, e la normale ON, e dal punto O, ove la normale incontra l' asse, si tiri la OE perpendicolare al detto ramo; la parte NE, che da questo quella ne tronca verso la curva, sarà uguale al semiparametro principale.

Vedi la dimostrazione della prop. XXVIII. ellisse, riscontrando la figura quì citata.

## PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA.

316. Se da' fuochi F, V [*fig*.28.] delle iperboli opposte si tirino le FH, VG perpendicolari ad una tangente GN dell' una curva, o dell' altra; il rettangolo di queste perpendicolari sarà sempre uguale al quadrato del semiasse conjugato CB.

E 'l rettangolo de' rami [*fig*.29.] FN, NV tirati al contatto N, serberà al quadrato della normale NO la costante ragione dell' asse primario al parametro di esso.

Dim. Part. i. Poichè il cerchio descritto intorno al diametro AD (313.) passa pe' punti H, G, ed è FH uguale a VT; sarà il rettangolo di FH in VG quanto l' altro di TV in VG, ossia quanto quello di DV in VA, e però quanto il quadrato di CB (302.)

La Part. ii. di questa prop. si dimostra come quella dell' ellisse, nella prop. xxix.

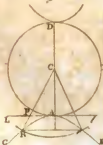
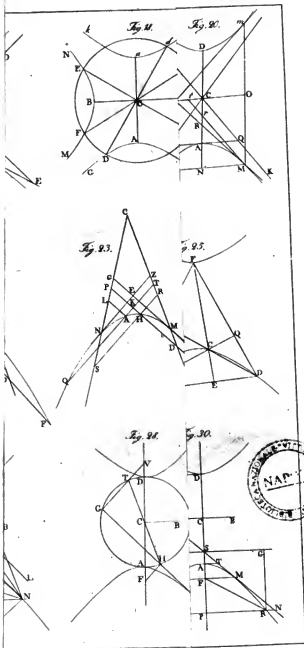
## PROPOSIZIONE XLII.

TEOREMA.

317. Nell' iperbole LAR [*fig*.30.] il ramo FR è quanto la semiordinata condotta all' asse pel suo estremo R, e distesa insino alla tangente SN, che procede dal punto di sublimità S verso lo stesso ramo. Cioè a dire la FR è uguale alla PN.

E lo stesso ramo FR sta alla perpendicolare RG, che dal suo estremo si tira sulla SG linea di subli-

Fig. 2
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 10
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 15

Fig. 21.
Fig. 20.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 28.
Fig. 30.

mità di essa curva, come l'eccentricità CF al semiasse AC.

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella dell' ellisse, prop. xxx. libro II., e nel riandarla si riscontri la figura citata.

## PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA.

318. Se agli estremi di due rami dell' iperbole conducansi le tangenti; la retta che unisce il fuoco col concorso di queste tangenti, dee divider per metà l' angolo compreso da' medesimi rami.

La dimostrazione di questo teorema è la medesima che quella della prop. xxi. della parabola, con supplirvisi la stessa avvertenza recata alla prop. xxi. per l' ellisse.

319. Cor. Nell' iperbole si possono anche dedurre, come si è fatto nella parabola, e nell'ellisse, le verità seguenti. I. *Se agli estremi di una corda condotta per un fuoco dell' iperbole si tirino a questa curva due tangenti; il concorso loro sarà allogato nella linea di sublimità*. II. *E ad essa corda dovrà esser perpendicolare la retta, che unisce il detto fuoco col concorso delle mentovate tangenti*.

*Fine del libro terzo.*

# APPENDICE

## A' TRE PRECEDENTI LIBRI

### PER MOSTRARE LA CORRELAZIONE DELLE CURVE CONICHE.

I. La genesi per sezione del cono, della quale si prevalsero gli antichi per le curve coniche, fu già detto essere la più semplice, ed insieme la più geometrica * : essa è ancora uniforme. Ed invero per ottenerle tutte non si esige che una superficie conica indefinita pe' due versi, ed un piano, il quale la seghi perpendicolarmente ad un altro piano condotto in essa per l' asse : e la posizione della retta, in cui intersegausi l' un piano e l' altro, farà decidere della specie della sezione prodotta dal piano segante. Poichè se tal comune sezione incontrando l' un de' due lati del cono, segnati da quel piano per l' asse, risulti parallela all' altro lato, la sezione sarà *parabola*; e girando tal comune sezione intorno a quel punto d' incontro, e verso il vertice del cono, la sezione diverrà *ellisse*, che in talun caso sarà ancor cerchio; indi coincidendo quella comune sezione col lato stesso, con cui intersegavasi il piano segante, darà per comune incontro del piano col cono il lato medesimo; e finalmente, continuando a girare, andrà quella ad incontrare l' altro lato del cono dall' altra parte del vertice, e produrrà le *iperboli opposte*, fintanto che non ritorni, compiendo l' intera rivoluzione, nella sua primiera posizione.

E questa genesi, ch' è la sola geometrica, poichè assegna il perimetro continuato della sezione, ed indefinito ove tal sia, ne mostra ancora l' uniforme natura di esse curve.

Ma siffatta loro uniformità di natura chiaramente risulta dalla corrispondenza delle proprietà per esse rilevate ne' precedenti tre libri; ed è però che abbiamo stimato convenien-

* *Storia delle Sezioni Coniche* §. 7.

te, a vantaggio de' giovani, di riassumere quì brevemente quelle proprietà, mostrandone la loro correlazione.

II. Il principio fondamentale per la correlazione delle curve coniche è la prop. VII. *Prenoz.* estesa poi ad ogni diametro nelle prop. VI. *parab.*, VII. *ell.*, ed VIII. *iperb.*, cioè:

1. *In ogni curva conica, il quadrato della semiordinata ad un qualunque diametro è uguale al rettangolo della corrispondente ascissa nella perpendicolare elevatagli dal suo estremo d' incontro con l' ordinata, prodotta fino ad una certa retta data di posizione, detta* regolatrice.

III. E poichè da questa proposizione veggonsi derivare, per la diversa posizione delle regolatrice rispetto al diametro (la quale nella parabola risulta parallela al diametro; e nell' ellisse, o iperbole vi converge nel vertice opposto a quello da cui cominciansi a computar le ascisse), che:

2. *Nella parabola il quadrato della semiordinata ad un diametro pareggia il rettangolo dell' ascissa corrispondente nel parametro che a quel diametro si appartiene* (38, 52.).

E però: *I quadrati delle semiordinate a ciascun diametro sono come le corrispondenti ascisse* (38, 49.)

3. *Nell' ellisse, o iperbole, il quadrato della semiordinata ad un diametro sta al rettangolo delle ascisse da ambo i vertici come il parametro al diametro* (113,131;200,217.). Quindi:

*In queste curve i quadrati di due semiordinate ad uno stesso diametro sono tra loro come i corrispondenti rettangoli delle ascisse tra i due vertici* (113,131;200,215.),

E queste affezioni di tali cusve ne mostrano ed evidenza l' uniformità di loro natura.

IV. Inoltre essendo sulle due precedenti proposizioni fondate le altre, che:

4. *La sottangente nella parabola è quanto l' ascissa corrispondente all' ordinata per lo contatto* (41,60.).

*E la sunnormale* (ch' è presa sempre sull' asse) *è quanto la metà del parametro di questo* (60.).

5. *Nell'ellisse l'ascissa dal centro corrispondente alla semiordinata pel contatto, il semidiametro, e la stessa ascissa accresciuta della sottangente, sono continuamente proporzionali* (118, 135.).

*E nell' iperbole si ha la stessa relazione, rimanendo però l' ascissa anzidetta minorata della sottangente.* (204, 218).

6. *Nell' ellisse, o nell'iperbole la sunnormale (che può prendersi sull' un de'due assi) sta alla corrispondente ascissa dal centro, come il parametro di tal asse all' asse stesso* (161; 222). Ovvero *come il quadrato di questo asse sta a quello del secondario.* (146; 260.).

Si vede però che tali proprietà, per la sottangente, o per la sunnormale, ne rappresentino una sola comune ad esse curve, distinte alquanto nella parabola, per l' indefinito corso della regolatrice, e de' diametri.

V. Da ciò anche deriva la specialità de' diametri conjugati per l' ellisse, e l' iperbole, e le proprietà rispetto ad essi dimostrate per tali curve, cioè, che:

7. *Le tangenti per gli estremi di un qualunque diametro dell' ellisse, o dell' iperbole sono tra loro parallele* (132, e 209.).

8. *Nelle iperboli opposte gli estremi de' diametri conjugati a quelli appartenenti ad esse curve sono allogati in due altre iperboli; dette però conjugate alle prime.* (252.).

9. *Nell' ellisse i diametri condotti pe' punti medii delle corde tirate da un punto della curva agli estremi di un diametro, sono tra loro conjugati* (*dim.*prop.10.).

*E nell' iperbole lo saranno del pari, purchè il diametro a' cui vertici sono tirate le corde sia un diametro primario* (261).

10. *Nell' ellisse l' asse maggiore è il massimo de' diametri; e 'l minore il minimo* (147.).

*E nelle iperboli opposte l' asse primario è il minimo de' diametri primarii* (265.).

11. *Nell' ellisse vi sono due semidiametri conjugati uguali; ed essi s' inclinano nel minimo angolo* (138, 160.).

12. *Nell' ellisse la somma de' quadrati di due diametri conjugati è quanto quella de' due assi* (153.).

*E nell'iperbole la differenza di que' primi quadrati è quanto la differenza de' secondi* (273.).

13. *Nell' ellisse, e nell' iperbole il parallelogrammo, che si compie da due semidiametri conjugati, è sempre uguale a quello de' due semiassi* (148, e 268.). Quindi:

14. *Tutt' i parallelogrammi circoscritti ad un' ellisse, le cui diagonali cadono su due diametri conjugati, risultano uguali; e parimente tutti gl' iscritti, le cui diagonali sono diametri conjugati* (150.).

*E lo stesso per gli uni, e per gli altri nelle iperboli tra le opposte e le conjugate* (269.).

15. *Tirando dagli estremi di due semidiametri conjugati dell' ellisse, e dell' iperbole le semiordinate agli assi rispettivi; questi ne rimarranno proporzionalmente divisi.*

*Ed il rettangolo de' segmenti di ciascun asse dovrà pareggiare il quadrato di quella della dette semiordinate, che gli è parallela* (152, e 272.).

16. *Nell' iperbole parilatera ciascun diametro pareggia il suo conjugato* (275.).

*E due diametri perpendicolari l' un l' altro sono pure tra loro uguali* (280.).

Viceversa: *due diametri uguali, o sono conjugati, o pure l' un l' altro perpendicolari.*

E così di tante altre verità, che per conseguenze delle quì indicate veggonsi da esse dedotte.

VI. La specialità dell' iperbole per la sua forma, e pe' suoi rami infiniti, a differenza dell' ellisse, ne conduce poi alle proprietà degli assintoti particolari ad essa.

17. *Prese su di una qualunque tangente dell' iperbole, a dritta e sinistra del contatto, due rette uguali al semidiametro secondario di quello che passa pel contatto stesso; tali rette non potranno giammai incontrare i rami di essa curva, e sa-*

*ranno però gli assintoti di questa, dell' opposta ad essa, e delle due conjugate* (231, e 252.)

18. Viceversa: *Conducendo una tangente all' iperbole, e fino agli assintoti, le parti di essa tra questi e 'l contatto saranno uguali, e ciascuna quanto il semidiametro secondario a quello pel contatto* (235.).

19. *L' angolo assintotico è retto, acuto, o ottuso, secondo che l' asse primario pareggi, sia minore, o maggiore del secondario* (238.).

20. *Tirando nell' iperbole, o tra le opposte una segante, che incontri però gli assintoti di esse; il rettangolo delle parti di tal segante, che sono fra la curva, e gli assintoti, sarà uguale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa segante* (236).

21. *Il rettangolo delle coordinate nell' iperbole tra gli assintoti è di costante grandezza, cioè quanto la potenza dell' iperbole stessa* (249.).

22. Quindi: *Le ordinate all' iperbole tra gli assintoti sono inversamente come le ascisse corrispondenti* (250.).

*Ed i triangoli formati da due coordinate qualunque sono uguali fra loro* (251.)

23. *La sottangente nell' iperbole tra gli assintoti è uguale all' ascissa corrispondente presa in sito opposto ad essa* (247.).

E così di altre verità, che da queste derivano, e che veggonsi recate nel cap. 2. lib. III.

VII. Ma la corrispondenza tra le tre curve coniche risulta più marcata nelle proprietà loro per le tangenti, e seganti, e pe' fuochi, come da quì appresso potrà rilevarsi.

### *Proprietà per le tangenti, e seganti.*

24. *I rettangoli de' segmenti di due corde, che s' interseghino dentro o fuori una curva conica, sono proporzionali, se è parabola, a' parametri de' diametri cui quelle appartengano per or-*

*dinate : se ellisse o iperbole, a'quadrati de'diametri paralleli ad esse* (63, 164, 289.).

Ed è facile rilevare, che la modificazione di tal rapporto, che osservasi per la parabola, derivi dall'indefinita natura de' suoi diametri : ma che l' un rapporto possa farsi anche nell' altro rientrare.

25. *Se da un punto fuori una curva conica cadano su di essa la tangente ed una segante ; starà il quadrato della tangente al rettangolo dell' intera segante nella sua parte esterna, se la curva sia parabola, come il parametro del diametro pel contatto a quello del diametro cui la segante è ordinata : e se ellisse o iperbole , come i quadrati de' diametri paralleli a quelle due rette* (66,168,290.).

E si vede, che la diversità, la quale osservasi nella parabola dipenda dalla stessa circostanza quassù indicata.

26. *Tirando per gli estremi di un diametro dell' ellisse , o delle iperboli opposte, le tangenti fino ad incontrare un' altra qualunque tangente laterale ; il rettangolo delle tangenti verticali sarà di una costante grandezza, e precisamente quanto il quadrato del semidiametro parallelo ad esse . E di più quel rettangolo sarà un massimo* (174,295).

27. Inoltre : *Il rettangolo delle parti della tangente laterale, che sono fra il contatto e le tangenti verticali , sarà quanto il quadrato del semidiametro parallelo ad essa. Ed a questo sarà pure uguale il rettangolo delle parti della tangente laterale tra 'l contatto e due semidiametri conjugati qualunque* (275, 296. ).

28. *Da un punto fuori una curva conica conducendo ad essa le due tangenti e due seganti ; le congiungenti le intersezioni superiori tra loro , e le inferiori pur tra loro , o saranno parallele alla retta fra' contatti , o concorreranno con questa in uno stesso punto* (79,172,293.).

29. *E le due congiungenti trasversali delle quattro intersezioni s' intersegheranno tra loro sulla retta fra' contatti* (80.)

30. *Se per un punto qualunque, dentro o fuori una curva conica, si tiri ad essa una corda; le tangenti per gli estremi di questa dovranno concorrere in una retta data di posizione* (83, 173, 294.).

Una tal retta dicesi *polare* di quel punto, il quale prende il nome di *polo* (86.).

Da questa proposizione fondamentale derivano molti importanti teoremi uniformi per tutte le curve coniche; e potranno vedersene i principali, che riporteremo nella nota alla prop. XV. *parab.* . . . in fine del presente volume.

*Proprietà pe' fuochi.*

VIII. Dalle def. 8, 9, e 10 per la parabola, che uniformemente estendonsi all' ellisse, ed all' iperbole, rilevasi il seguente teorema.

31. *In ogni sezione conica, la linea di sublimità è la polare del fuoco, che gli è più vicino* (97. in fine).

Le proprietà principali poi de' fuochi sono le quì appresso.

32. *La tangente la parabola in un punto, il ramo che va ad esso, la normale, e 'l diametro corrispondente sono rette armonicali* (102.).

E lo stesso ha luogo per l' ellisse, e l' iperbole, laddove al diametro sostituiscasi il ramo che va all' altro fuoco (185, 303.).

33. *Nella parabola la tangente per un punto di essa s' inclina egualmente al ramo ed al diametro pel contatto* (103.).

*E nell' ellisse ed iperbole fa angoli uguali co' due rami che vanno al contatto* (187, 305.).

34. *In una curva conica, ciascun ramo sta alla perpendicolare tirata dal suo estremo alla linea di sublimità, in una costante ragione, che per la parabola è di uguaglianza* (105, 197, 317.).

Ed inoltre: *Ciascun ramo è uguale alla semiordinata con-*

*dotta all' asse pel suo estremo, prodotta fino alla tangente che procede dal punto di sublimità* (105,197,317.).

35. *In ciascuna curva conica, se dal punto ove la normale incontra l' asse si tiri la perpendicolare al ramo, che va al contatto; questa ne troncherà verso tal punto una parte quanto il semiparametro principale* (107,195,315.).

36. *Se per gli estremi di due rami tirati dal fuoco di una curva conica le si tirino le tangenti; la congiungente il concorso di queste col fuoco bisecherà l' angolo compreso da' rami* (109,198,318.).

37. *E se le tangenti sieno condotte per gli estremi di una qualunque corda tirata per un fuoco, la congiungente il loro concorso col fuoco risulterà perpendicolare alla corda* (112, 199,319.).

IX. La specialità poi dell' ellisse e dell' iperbole, per avere un centro, e due fuochi, dà luogo per esse alle seguenti altre proprietà loro comuni.

38. *Nell' ellisse il quadrato dell' eccentricità pareggia la differenza di quelli de' semiassi. E nell' iperbole n'è quanto la loro somma* (182,301.).

39. *Ed essa eccentricità è media proporzionale, nell'ellisse, tra il semiasse maggiore, e la costui differenza dal semiparametro principale; nell'iperbole tra il semiasse principale e la somma di esso e del corrispondente semiparametro* (182,301.).

40. *Nell'ellisse, e nell'iperbole il rettangolo de'rami, che da' fuochi vanno ad uno stesso punto della curva, è uguale al quadrato del semidiametro conjugato a quello che passa per tal punto* (190,308.).

41. *Nell' ellisse la somma de' rami condotti da' fuochi ad un medesimo punto della curva pareggia l' asse maggiore; e nell' iperbole l' asse primario pareggia la loro differenza* (191,309).

42. *Tirando da' fuochi dell' ellisse, o dell' iperbole le perpendicolari ad una qualunque tangente; il rettangolo di*

*queste perpendicolari pareggerà il quadrato del semiasse secondario* (196,316.).

43. *Ed il rettangolo de' rami starà al quadrato della normale corrispondente come l' asse primario al suo parametro* (196,316.).

X. Or dalla correlazione sì marcata delle principali affezioni delle curve coniche, in quest' appendice enunciate, rilevandole da' tre libri elementari che precedono, e dalle altre che abbiamo tralasciate, e che da quelle derivano comè conseguenze, rimane comprovata abbastanza l' uniformità di natura di tali curve, che non però tralasceremo di vieppiù illustrare con le ricerche del libro seguente, e nelle note in fine del presente trattato. E sarebbe facil lavoro, e da farsi però da qualunque giovine ben introdotto nel ragionamento geometrico, dimostrate che abbia le proprietà dell' ellisse, estenderle all' iperbole, ed alla parabola, come, *nel trattato analitico per tali curve*, trovasi dal Fergola fatto.

XI. In fine, ritornando alle considerazioni sulla genesi delle curve coniche, premesse nel n.I, si vede, che essendo il cerchio una speciale ellisse ad assi uguali, di cui però l' eccentricità è svanita, perchè i due fuochi sonosi raccolti in un punto, cioè nel centro del cerchio; il che deriva dalla posizione, che nel triangolo per l' asse è giunta a prendere la comune sezione con esso del piano segante il cono; le sue proprietà con quelle dell' ellisse debbano confondersi, e derivarne come un caso particolare: che però, per la facilità di ravvisarle in quello, e di dimostrarle, furono da' geometri, prima che si avesse cognizione dell' ellisse, rilevate indipendentemente dalle considerazioni su questa curva.

Ed inoltre considerando, che se la comune sezione del piano segante, per le iperboli, con quello del triangolo per l' asse, si avvicini sempre al vertice del cono, fino a passare per esso; in tal caso l' asse primario delle iperboli

svanirebbe nel vertice del cono, e le iperboli si trasmuterebbero in due rette, cioè ne' due lati di questo prodottivi da quel piano segante giunto in tal posizione.

E dal qui detto comprendesi, come possa in taluni casi ottenersi col cerchio ciò che sembrava a prima vista dipendere dall' ellisse; e dall' intersezione di rette quella soluzione, che sembrava dipendere da una proprietà dell' iperbole. Di che se ne ha un esempio nella maravigliosa trasmutazione, che operò il Newton della impropria soluzione di Adriano Romano, pel problema *del cerchio da toccarne tre altri dati* (*Princip. Math. lem.* XVI.); e nella proprietà fondamentale per l' iperbole, che, dimostrata convenevolmente pur nel triangolo, servì al Fergola per risolvere uniformemente tutt' i problemi de' *contatti circolari*, de' quali, dopo di questo nostro geometra, sonosi tanti altri ingegnati a darne diverse soluzioni.

DELLE

# SEZIONI CONICHE

## LIBRO QUARTO

### DELLA SIMILITUDINE, DELLE INTERSEZIONI, E DELLA CURVATURA DELLE CURVE CONICHE; E DEL MODO GEOMETRICO, O MECCANICO DI ESIBIRLE.

### INTRODUZIONE.

320. Il presente libro, come la semplice epigrafe il dichiara, comprende quattro specie di ricerche tra loro separate, e distinte; quella cioè della similitudine delle curve coniche; 2° l' altra delle intersezioni di esse; 3° quella della curvatura ne' diversi loro punti; 4° ed in fine il modo di geometricamente, o meccanicamente esibirne il perimetro. E di ciascun di questi argomenti verrà meglio specificato l'oggetto, e l' importanza nell' imprenderne la trattazione.

## CAPITOLO I.

### Delle curve coniche uguali e simili.

321. Di questo argomento trattò estesamente Apollonio nel libro VI. de' suoi Conici, come egli stesso dichiaravalo ad Attalo, al quale indrizzava un tal libro, del pari che aveva fatto de' due precedenti, e degli altrettanti che venivan dopo; morto che fu quell' Eudemo, cui egli aveva già inviati i primi tre, accennando degli altri. Ed egli così scriveva ad Attalo: *Mitto tibi sextum Conicorum librum: qui complectitur propositiones de sectionibus conicis, et sectionum segmentis aequalibus et inaequalibus, similibus, et dissimilibus.* Ma un tale argomento, così da quel gran geometra esposto, non servendo che *ad abundantiorem scientiam*, come egli medesimo l' aveva dichiarato ad Eudemo nella prima sua lettera, però qui ne daremo le poche principali nozioni più importanti, che al nostro proposito occorrono, e l' attuale stato della Geometria esige.

322. Def. 1. Due sezioni coniche si dicono uguali, se l' una adattata convenevolmente sull' altra vi coincida, senza affatto intersegarla.

Cioè: se adattato l' asse dell' una sull' asse dell' altra, e 'l vertice sul vertice corrispondente; le ordinate che corrispondono ad ascisse uguali sieno ancora uguali.

323. Cor. 1. Si vede quindi, che non possa supporsi uguaglianza tra due curve coniche di diversa specie.

324. Cor. 2. E che due curve coniche saranno uguali, se abbiano identici dati per assegnarle: cioè, essendo parabole, se abbiano lo stesso parametro per l'asse: se fossero ellissi, avendo gli stessi assi conjugati, o due diametri conjugati uguali comprendenti un angolo stesso; o pure uno stesso asse e la medesima eccentricità: e similmente per le iperboli, per

le quali i caratteri di uguaglianza possonsi anche desumere dall' avere la stessa potenza, e lo stesso angolo assintotico.

## PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

325. Se due curve coniche, compresovi il cerchio *; abbiano un comune segmento, esse dovranno essere uguali.

Dim. Imperocchè, se è possibile, la curva conica ABC [*fig.1.*], abbia con l' altra ABD, comune il segmento AB, senza che coincidano nel rimanente del loro perimetro. Si tirino all' una di esse, per gli estremi A, B del loro comune segmento le tangenti AE, BE, che risulteranno ancora tangenti l' altra curva; e però tirata per E la segante EFHK ad entrambe, e congiunta la retta AB fra' contatti; dovrà al la EK, che la EH rimanere divisa armonicamente negli stessi punti F, G (73, 170, 292.): ch' è impossibile. Adunque ec. — *C. B. D.*

326. Def. ii. Due sezioni coniche si diranno simili se quelli elementi di esse, d' onde derivava la loro uguaglianza, sieno solamente proporzionali; essendo però sempre uguali gli angoli, ove questi faccian parte di quelli elementi.

Poichè è evidente, che una tal proporzionalità divenendo di uguaglianza, le sezioni coniche diverranno uguali. E questo è il criterio vero della similitudine da noi stabilito negli Elementi (*Vedi le def.2. VI, e 10.XI, e le note corrispondenti ad esse.*).

327. Cor. 1. È dunque manifesto, che non possano esser si-

* In appresso, dicendosi *sezioni coniche*, s'intenderà sempre compreso il cerchio.

mili due curve coniche di specie diversa; poichè esse, come si è precedentemente detto, non possono divenir mai uguali.

228. Cor. 2. E dal teorema precedente è facile accorgersi, che se due curve coniche sieno dissimili, nessuna porzione dell' una potrà mai coincidere con una dell'altra.

329. Def. III. Due curve coniche simili si diranno anche similmente poste, se i loro assi, o diametri conjugati corrispondenti, che potranno anche dirsi *omologhi*, sieno paralleli.

330. Scol. Si suppone ch' esse sieno in uno stesso piano, o in piani paralleli.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

331. Tutte le parabole sono simili.

Dim. Imperocchè è chiaro, che in esse le semiordinate corrispondenti ad ascisse uguali, prese sugli assi, o su due diametri inclinati ugualmente alle loro ordinate, essendo in sudduplicata ragione de' loro parametri, debbano divenire uguali nel caso che il divengano pur questi; e però le parabole trasmutandosi in uguali, per la def. 2, saranno simili.

332. Cor. Dunque tutte le parabole, che hanno i diametri paralleli sono simili, e similmente poste (329.).

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

333. Le ellissi, o le iperboli saranno simili, se i loro assi, o diametri conjugati comprendenti angoli uguali sieno proporzionali.

Dim. Imperocchè è manifesto, che divenendo gli assi, o i diametri conjugati l'un l'altro ugnali, quelle curve diverranno rispettivamente uguali.

334. Cor. 1. E però: *Saranno ancora simili, se i diametri conjugati comprendenti gli angoli uguali sieno proporzionali a' loro parametri, o il siano gli assi alle eccentricità.*

Ciò rilevasi da' §§. 146 e 182 *part.2*, per l'*ellis.*, e 225 e 301. per l'*iperb.*

335. Cor. 2. Ed inversamente: *Se due ellissi, o due iperboli sieno simili; due diametri conjugati qualunque dell' una saranno proporzionali a que' diametri conjugati dell' altra, che comprendono lo stesso angolo de' primi.*

336. Scol. È poi chiaro, che nelle iperboli i termini omologhi della proporzione debbano essere i diametri primari tra loro, ed i secondari tra loro.

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

337. Le iperboli tra gli assintoti, che hanno uguali gli angoli da questi compresi, sono simili.

Dim. Imperocchè tirati pe' loro vertici principali A, *a* [*fig. 2.*], i semiassi CA, C*a*, e le tangenti BAD, *bad*, fra gli assintoti rispettivi, saranno BA, *ba* i semiassi secondari delle iperboli MAN, *man* descritte con potenze diverse negli uguali angoli assintotici BCD, *bcd* (235.). Ed essendo simili i triangoli CAB, *cab* si avrà, CA : *ca* :: AB : *ab*, cioè i semiassi primari proporzionali a' secondari; e però tali iperboli saranno simili (*prop.3.*).

*Aliter.*

Poichè divenendo uguali le loro potenze, esse iperboli si faranno uguali (*def.* 2.).

338. Cor. 1. Quindi tutte le iperboli descritte nello stesso angolo assintotico, con diverse potenze, sono tra loro simili, e similmente poste.

339. Cor. 2. E le iperboli equilatere sono tutte simili.

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

340. Se due ellissi, o due iperboli, che hanno un sistema di diametri conjugati paralleli, ne abbiano ancora un altro ugualmente condizionato; le due ellissi, o le due iperboli saranno simili, e similmente poste.

Dim. Sieno CA, CB [*fig.* 3.] due semidiametri conjugati di un'ellisse, o di un'iperbole paralleli a'semidiametri conjugati *ca*, *cb* di un'altra ellisse, o iperbole, e la prima abbia ancora gli altri semidiametri conjugati CD, CE paralleli ai conjugati *cd*, *ce* della seconda. Applicando le tangenti ai vertici D, *d* di due semidiametri paralleli, che incontrino in F, *f* i due altri anche paralleli CA, *ca*; queste tangenti saranno anche parallele, perchè parallele a' diametri CE, *ce* conjugati de' primi; e però i triangoli CDF, *cdf* saranno simili. Ciò posto le DQ, *dq* semiordinate a CA, *ca* essendo ancor parallele, divideranno le basi CF, *cf* in segmenti proporzionali; e saranno però simili i triangoli CDQ, *cdq*: da che si avranno le due analogie CF : CD :: *cf* : *cd*

CQ : CF :: *cq* : *cf*

Ma sta (118, 204) CQ : CF :: $CA^2 : CF^2$, e *cq* : *cf* :: $ca^2 : cf^2$;

quindi starà CA : CF :: *ca* : *cf*

dalla quale analogia, combinata con la prima, si avrà, per egualità ordinata CA : CD :: *ca* : *cd*

E dimostrando nel modo stesso, che stia

CB : CD :: *cb* : *cd*

risulterà CA : CB :: *ca* : *cb*

Vale a dire i semidiametri conjugati CA, CB dell'una curva non solamente sono paralleli, ma anche proporzionali ai semidiametri conjugati *ca*, *cb* dell' altra; ond' è che tali due curve saranno simili, e similmente poste.

341. Cor. 1. Segue da ciò, che: *se due ellissi, o iperboli comunque situate su di un piano, abbiano un sistema di diametri conjugati paralleli, non potranno averne un secondo, ugualmente condizionato, senza esser simili, e similmente poste.*

342. Cor. 2. Risulta inoltre dalla dimostr. preced. che:

*Se due di tali curve sono simili, e similmente poste; due diametri qualunque dell' una, comunque tra loro inclinati, saranno proporzionali ai corrispondenti diametri paralleli dell' altra.*

343. Def. iv. In due sezioni coniche simili, si diranno *omologhi* que' punti, che esistendo su due diametri *omologhi*, e però similmente inclinati alle tangenti pe' loro vertici, le ascisse ch' essi punti determinano da' vertici medesimi sieno proporzionali a' parametri degli stessi diametri.

344. Cor. 1. Dunque due punti omologhi saranno contemporaneamente interni, o contemporaneamente esterni alle due curve; ed ove queste sieno ellissi, o iperboli, è pur chiaro, che i punti omologhi divideranno i diametri su cui si trovano in segmenti proporzionali tra loro, alle ascisse da' centri, a' diametri stessi, a' loro conjugati, ed alle ordinate corrispondenti.

345. Cor. 2. Ed essendo le ellissi, e iperboli anche similmente poste; i punti omologhi dovranno necessariamente trovarsi su due diametri paralleli, essendo sempre omolo-

ghi , per due curve così condizionate , due diametri paralleli qualunque.

346. Cor.3. Se sieno CA, CD [ *fig.3.* ] due semidiametri qualunque di un' ellisse, o iperbole paralleli ai semidiametri *ca* ; *cd* di un' altra sezione conica simile, e similmente posta alla prima ; e da' vertici D, *d* de' due semidiametri paralleli CD , *cd* si tirino comunque sugli altri le inclinate parallele DH , *dh* ; saranno simili i triangoli CDH , *cdh*; e però tanto le incidenti HD, *hd*, quanto le ascisse da' centri HC, *hc* saranno proporzionali ai semidiametri CD , *cd* , e quindi ( 342.) anche agli altri CA , *ca* . Adunque i due punti H , *h* saranno omologhi . E poichè i semidiametri CA , *ca* , o gli altri CD , *cd* sono proporzionali (342. ) a due altri semidiametri paralleli qualunque , ne segue che :

*Se due punti in due ellissi, o iperboli simili, e similmente poste , sono omologhi ; due incidenti qualunque , tra loro parallele , tirate per essi alle curve rispettive , saranno proporzionali a due diametri paralleli qualunque, o a' loro parametri.*

E viceversa è chiaro , che :

*Se quelle incidenti sieno proporzionali a due diametri paralleli , debbano ancor esse esser parallele tra di loro.*

347. Cor. 4. Quindi al pari del punto, può l' una di queste incidenti dirsi *omologa* all' altra .

348. Cor. 5. Ed è facile rilevare , che nelle parabole similmente poste , le due incidenti ugualmente condizionate sieno proporzionali a' parametri de' diametri su cui trovansi i punti omologhi.

349. Scol. Laddove non si vogliano le curve simili considerare ancora per similmente poste, la condizione del parallelismo delle incidenti , di cui è detto ne' cor. 3, 4, 5 verrà sostituita dagli uguali angoli ch' esse facciano co' diametri omologhi.

## PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

350. In due sezioni coniche simili, e similmente poste, due incidenti qualunque, condotte ad una di esse da un qualsivoglia punto, sono proporzionali alle rispettive rette omologhe, condotte nell' altra dal punto omologo corrispondente.

Imperciocchè essendo due rette omologhe qualunque, rispetto all' una, ed all' altra sezione conica, proporzionali a due diametri omologhi, ossia paralleli qualunque, o a' loro parametri, è chiaro, che le due incidenti nell'una debbano esser proporzionali alle corrispondenti rette omologhe nell'altra.

351. Cor. La conversa di questa proposizione è evidentemente anche vera, cioè a dire, che:

*Se due sezioni coniche sono tali, che tirate ad arbitrio, da un punto qualunque, due incidenti ad una di esse, le medesime risultino proporzionali a due incidenti parallele nell' altra* (o viceversa), *condotte dal punto omologo corrispondente; queste sezioni coniche saranno simili, e similmente poste.*

352. Scol. Da tutte le precedenti considerazioni risulta evidente, che le proprietà, le quali caratterizzano due sezioni coniche simili, e similmente poste, valgono ancora a caratterizzare le curve coniche solamente simili, con sostituire al parallelismo delle rette omologhe la condizione, ch' esse facciano angoli uguali tra loro, e co' diametri omologhi.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

353.Tutte le ellissi, o le iperboli segnate in un cono da piani paralleli sono simili, e similmente poste.

Dim. Sieno PDQ, *pdq* [ *fig.4.* ] due ellissi, o due iperboli segnate su di un cono da piani paralleli; saranno pur paralleli i loro diametri PQ, *pq*, comuni sezioni di questi piani col piano del triangolo PEQ, che per la genesi di queste curve è condotto per l' asse del cono; e quindi risulteranno simili i triangoli PEQ, *p*E*q*; ond' è che i centri C, *c* di tali curve staran per dritto col punto E, e si avrà

PC : CE :: *pc* : *c*E

Ciò posto s' intenda per questa retta EC condotto comunque un altro piano, e sieno le rette EF, ED le comuni sezioni di tal piano col cono, ed FD, *fd* quelle, che dal piano medesimo vengono segnate ne' piani delle curve proposte, e che ne saranno diametri: questi diametri saranno benanche paralleli; e perciò simili i triangoli FCE, *fc*E; ond' è che starà FC : CE :: *fc* : *c*E

e quindi risulterà PC : CF :: *pc* : *cf*

Laonde le proposte ellissi, o iperboli PDQ, *pdq* saranno simili, e similmente poste (342.).

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

354.Se tra i lati BA, AC [ *fig.5.* ] del triangolo BAC, per l' asse e per l' altezza del cono BCFA, s' inclinino ad essi lati due rette DGE, HGI negli angoli uguali AED, AHI; i piani condotti per le

DE, HI, perpendicolari a quello del triangolo ABC vi segneranno ellissi, o iperboli simili.

Dim. Imperocchè essendo l' angolo IEG uguale all' altro DHG, saranno ancora simili i triangoli IGE, DGH; e però starà IG : GE :: DG : GH, ed il rettangolo IGH sarà uguale all' altro DGE. Laonde il quadrato di FG, semiordinata comune agli assi DE, HI di tali curve nel punto G, serberà la medesima ragione a' rettangoli DGE, HGI delle ascisse corrispondenti da' due vertici; e quindi saranno uguali le ragioni che a tali assi serbano i loro rispettivi parametri: ond' è che esse curve saranno simili.

355. Cor. Quindi le ellissi, o le iperboli simili, segnate nel cono da' piani paralleli, ne hanno un' altra serie prodottavi da piani anche tra loro paralleli, ma succontrariamente posti.

## CAPITOLO II.

### Delle intersezioni delle curve coniche.

356. La teorica delle intersezioni delle curve se l'è di grande importanza nella Geometria moderna, l'era ugualmente, e forse ancor di più nell'antica, poichè per mezzo di essa pervenivasi talvolta a discernere la natura de' problemi; ond'è che su questo argomento più di un geometra dovè occuparsi generalmente considerandolo. E sappiamo che quel Conone Samio contemporaneo di Archimede, che il tenne sempre, mentre quello visse, in gran pregio, come ben rilevasi dalla lettera, con cui dirigeva a Dositeo il suo libro delle *spirali* *, aveva trattato *de' punti ne' quali una sezione conica poteva essere intersegata da un cerchio*, indirizzando tali sue ricerche al geometra Trasideo, del quale non rimane altra notizia che questa, come ancora dell'altro suo contemporaneo Nicotele Cireneo, che scrivendo un libro contro Conone, per l'inimicizia ch'era tra loro **, il riprendeva di poca esattezza nel dimostrare, soggiugnendo esser facili le dimostrazioni sì per la parte suddetta di tal ricerca, che pel complemento di essa intorno alle intersezioni delle curve coniche e del cerchio con le iperboli opposte: senza però che nè egli, nè altri avesse col fatto ciò comprovato. Di che rimprocciandolo il grande Apollonio, intraprese egli una tal

* È degno di esser qui ripetuto, come modello di elogio per un vero scienziato, il modo come a riguardo di Conone si esprime Archimede: *Conon quidem, cum tempus sibi sumpsisset ad haec scrutanda minime idoneum, vita decessit, eaque obscura reliquit; licet his omnibus, aliisque pluribus inventis longe Geometriae fines amplificaverit. Novimus enim fuisse in eo viro haud vulgarem scientiae huius peritiam, eximiamque industriam.*

** Abbiamo dunque di che ben consolarci delle impertinenze commesseci non ha guari, da persone imperite nella scienza geometrica, per esserci adoperati al vantaggio di essa.

trattazione; come aveva già indicato ad Endemo, nella lettera con la quale accompagnava l'invio che facevagli del primo libro de' suoi Conici; e morto costui il ripeteva ad Attalo nell' altra lettera con cui indrizzavagli il lib. IV di essi conici, in dove l'argomento suddetto veniva ordinatamente esposto, e dalla quale raccolgonsi le anzidette notizie.

Apollonio dunque deve aversi come il primo tra gli antichi geometri, il quale avesse con estensione trattato questo argomento per le curve coniche *, oggetto di grande importanza per la composizione de' problemi *solidi*. E potremmo senza compromissione asserire, che le verità ch' egli con la semplice Geometria vi discopre, non si ottengano con la medesima facilità chiamando in soccorso l' Analisi algebrica : e ciò oltre alla naturalezza de' principii che vi adopra. Al qual proposito ne sarà lecito dolerci della facilità grande con la quale talnni, che han presa, al dì d' oggi, a coltivare l'antica Geometria, facendone quasi una scienza immaginativa, si sforzino trarre verità geometriche da principii *paradossali* ed inconcepibili; dal qual modo nuovo di ragionare essa non potrà che soffrirne grandemente. La Geometria non ha bisogno di nuovi principii pe' suoi progressi, essendo a se medesima sufficiente, purchè quelli solidissimi, ch'ella possiede, sappiansi bene, e convenevolmente applicare : il che potranno comprovare le verità nnove, che sull' argomento delle intersezioni delle curve coniche aggingneremo nel presente capitolo a quelle lasciateci da Apollonio.

Lo scopo che abbiamo avuto in esporre qui con qualche estensione, più che altre volte non si era fatto, e ad un libro elementare non convenivasi, nn tale argomento, l'è stato quello, di averci proposto in qnesto corso geometrico, e così ancora per l'altro di Analisi moderna, di preparare tutto quanto il materiale bisognevole per ben percorrere, e prose-

* Ciò afferma egli medesimo nella citata lettera ad Eudemo.

guire la carriera difficile ed interminabile dell'invenzione matematica, e ad intendere le opere de' sommi geometri sì antichi, che moderni, senza lo studio profondo delle quali non può aversi che appena una scienza elementare, ed incompiuta; dalla quale son poi derivate tutte quelle instituzioni che veggonsi prodotte nel presente secolo, ed i falsi giudizi sulle antiche, o su' metodi, l'una succedendosi all'altra, e sì l'una che l'altra rimanendo ben presto condannate all'obblio.

Or mirando il presente argomento, e l'altro della maniera di esibire una curva conica, per mezzo de' suoi convenevoli determinanti, alla determinazione, e composizione de' problemi *solidi*, non potevasi esso senza taccia tralasciare, tanto più, che nulla di ciò s' incontra in altri trattati istituzionali; e però ci siamo veduti in obbligo di recarvelo.

Il principio che campeggia nelle nostre dimostrazioni è quello della divisione armonica, il quale se con tanta utilità si è veduto adoperato ne' precedenti libri in difficili dimostrazioni, rese per mezzo di esso facili e piane, vantaggiosissimo si vedrà riescire nel presente argomento, pel quale, dopo aver esposti alcuni teoremi elementari, ne aggiugneremo una buona mano di altri nuovi, ed importanti per molte difficili ricerche di moderni geometri coltivatori dell'antica Geometria.

## PROPOSIZIONE IX.

### TEOREMA.

357. Una curva conica non può intersegare altra curva conica, in più di quattro punti.

S' è possibile la curva conica ABCE [*fig.* 6.] sia segata ne' cinque punti A, B, C, D, E dall'altra AKDE. Si uniscano le

AB, DC, che prodotte incontrinsi in L : d'onde si conducano ad una delle curve le tangenti LM,LN ; congiunta MN, è chiaro che questa retta passerebbe pure pe' contatti delle tangenti menate all'ultima curva dallo stesso punto L ; quindi tirata LGKFE all' altro punto E d' intersezione delle curve proposte, dovrà tal retta restar divisa armonicamente una volta in G, F, ed un' altra in K, F ( 73, 170, e 292.) . Lo che ripugna.

Che se le AB , DC fossero risultate parallele , non lo sarebbero state le AB , EC ; e la dimostrazione sarebbe proceduta nel modo stesso che la precedente.

358. Cor. Poichè due sezioni coniche non possono intersegarsi in più di quattro punti, ne segue, che se due di esse abbiano comuni cinque punti debbano risultare identiche, coincidendo in tutto il loro perimetro. Quindi si vede, che *per cinque punti non possa passare , che una sola ed unica sezione conica* .

## PROPOSIZIONE X.

### TEOREMA.

359. Se una curva conica ne tocchi un' altra , non potranno queste due curve segarsi in più di due altri punti .

S' è possibile la curva conica ABC [ *fig.7.* ] tocchi l' altra BDEF , nel punto B , e l' interseghi ne' tre altri D , E , F . Tirata per B la tangente BG comune alle due curve , e congiunti due de' tre punti d' intersezione come E , D, la congiungente ED convenga con la tangente in G , d' onde si tiri all' una delle curve l' altra tangente GM ; ed unita BM , si conduca ad F la GHLKF : dovrà tal retta restar divisa armonicamente una volta in K , H , ed un' altra in K , L . Che ripugna.

Se la ED risultasse parallela alla BG, la dimostrazione si sarebbe fatta congingnendo il punto D con l'altro F, o anche F con E; poichè l' nna, o l' altra congiungente dovrebbe necessariamente incontrare la BG.

## PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

360. Se una curva conica tocchi un' altra in due punti, non potrà incontrarla altrove.

S' è possibile la curva conica ACBD [ *fig.8.n.1.* ] tocchi l' altra AFBD ne' punti A, B, e l' interseghi in D. Si tirino pe' punti di contatto A, B le tangenti AE, BE, che convengano in E; e congiungasi la retta ED, che rimarrà divisa armonicamente dalla retta fra' contatti AB in K, e dall' una delle cnrve in H, dall'altra in L. Che non può essere.

Che se le AE, BE [ *fig. 8. n. 2.* ] risnltassero parallele, allora la AB, sarà un diametro comune (122, e 209) alle due sezioni coniche; e quindi condotta ad esso da D l' ordinata DKLH, le semiordinate HK, KL sarebbero uguali, perchè uguali entrambe a DH; il che è assurdo.

## PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

361. Se un cerchio incontri la parabola come in un de' casi di cui sta detto ne' precedenti teoremi, almeno un de' punti d' incontro, sia intersezione, o contatto, dovrà cadere dalla parte dell'asse contraria a quella ove sono gli altri.

Dim. Cas. i. Un cerchio interseghi la parabola BAD [*fig.9.*] ne' quattro punti C, E, F, D, che suppongasi cadere da una stessa parte AD per rapporto all' asse AQ. Congiunte le CF, ED, i rettangoli CGF,EGD sarebbero uguali; e però le CF, ED apparterrebbero per ordinate a' diametri HK, LM equidistanti dall' asse; lo che ripugna.

Cas. ii. Che se il punto di contatto C [*fig.10.*] del cerchio con la parabola BAF cadesse dalla parte medesima co' punti d' intersezione E, F; tirata per C la tangente CH, e congiunta la EF; queste rette o s' incontreranno in H, ed allora essendo il rettangolo EHF uguale a CH², il diametro che passa pel contatto C, e l' altro cui è ordinata la EF, i quali cadono da una medesima parte della parabola, dovrebbero essere equidistanti dall' asse, senza che possino coincidere. Lo che è un assurdo. O se pur la EF si supponesse parallela alla tangente CH [*fig. 11.*], divisa essa EF per metà in K, e congiunta la CK, tal retta, ch'è un diametro della parabola, dovrebbe, per la natura del cerchio, risultar perpendicolare alla EF; il che non può avvenire, che nel solo caso che la EF sia l' asse della parabola, e C il vertice di tal curva: ed allora è manifesto, che l' un de' punti d' intersezione E cadrebbe da una parte dell' asse, l' altro dall' altra.

Cas. iii. Finalmente se il cerchio tocchi in due punti la parabola, è manifesto, che questi dovranno cadere negli estremi di una medesima ordinata all' asse; e quindi a parti opposte di esso.

Laonde ec. — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

362. Se un cerchio incontri la parabola, e da'punti dell' incontro si tirino le semiordinate all' asse di questa; la somma di quelle semiordinate, che sono da una parte di un tal asse, dee uguagliare la somma delle rimanenti dall'altra parte: ove nel caso di contatto, si prenda due volte la semiordinata per tal punto.

Dim. Cas. i. Sieno A, B, C, D [*fig. 12.*] le quattro intersezioni, ed AQ, BS, CR, DP le corrispondenti semiordinate all' asse. Tirate le corde AB, CD, i diametri condotti pe' loro punti medii M, N saranno equidistanti dall'asse (*dim. prop. 12.*); e però le MG, NE, perpendicolari all' asse stesso, saranno uguali fra loro. Ciò posto, poichè le DP, CR sono ad ngual distanza dalla NE, sarà la loro somma doppia di NE; ed essendo per la medesima ragione la somma delle AQ, BS doppia di MG, risulta la somma delle semiordinate DP, CR, che sono da una parte dell' asse, uguale alla somma delle semiordinate AQ, BS, che sono dall' altra.

Cas. ii. Che se il cerchio tocchi la parabola [*fig. 13.*] in T, i diametri TK, VH saranno parimente equidistanti dall'asse; e la semiordinata TG, essendo perciò uguale ad NE, sarà la somma delle DP, CR doppia di TG.

Cas. iii. Che se il cerchio tocchi la parabola AFN [*fig. 14.*] ne' punti A, D; questi dovranno necessariamente essere equidistanti dal vertice della parabola, e la loro congiungente sarà l' ordinata AID all' asse; ond' è che le AI, DI risulteranno ugoali.

Laonde ec. — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

363. Due sezioni coniche simili, e similmente poste non possono intersegarsi in più di due punti.

Dim. Cas. I. Suppongasi in prima, che le due curve abbiano centro, e sieno questi P, Q [*fig. 15.*]. Sieno inoltre A, B due punti comuni alle curve stesse, e pel punto M, medio della corda AB, si conducano i diametri nell' una, e nell' altra curva; saranno questi diametri conjugati alla medesima direzione di AB: e le due curve essendo, per ipotesi, simili, e similmente poste, ne segue ch' essi staranno per dritto. Da ciò risulta, che *la congiungente de' centri di due curve simili, e similmente poste, sia conjugata alla direzione della corda comune*. Se dunque vi potesse essere una terza, o quarta intersezione, le loro congiungenti co' punti A, B dovrebbero essere conjugate alla stessa PQ; il che è impossibile. Laonde le due sezioni coniche non possono intersegarsi in più di due punti.

Cas. II. Se le due curve sieno parabole [*fig. 16.*], e s'interseghino in A, B, supponendo che possa esservi una terza intersezione C, si tirino le tre corde AB, BC, CA, e si bisechino in M, N, S; sarà MN parallela ad AC, la quale è per le due parabole un' ordinata comune al diametro condotto per S. Sia P l' incontro di questo diametro con MN, che prolungata indefinitamente incontri l' una parabola in D, $d$, l' altra in E, $e$; saranno le semiordinate DP, EP uguali rispettivamente a $d$P, $e$P. Ciò posto, se l'arco parabolico ADB sotteso dalla corda AB si supponga interiore all' arco AEB, è chiaro che l' arco B$e$C, continuazione dell' arco AEB, sarà per l' opposto esteriore all' arco B$d$C. Così essendo, sarà PD maggiore di PE, e P$d$ minore di P$e$: ma per es-

sere P$d$ uguale a PD, e P$e$ uguale a PF, dovrebbe essere P$d$ maggiore di P$e$. Dunque P$d$ sarebbe or minore, ed or maggiore di P$e$; il che ripugna. Quindi due parabole similmente poste non possono intersegarsi in più di due punti.

364. Cor. 1. Risulta ancora da ciò, che due sezioni coniche simili, e similmente poste non possano toccarsi in più di un punto, nel quale s' intendono riunite due intersezioni; ed inoltre, che la congiungente i centri delle due curve passi pel contatto, e sia conjugata alla direzione della loro tangente comune nel punto stesso.

365. Cor. 2. Poichè due sezioni coniche simili, e similmente poste non possono avere più di due punti comuni, ne segue, che *per tre punti non possa farsi passare, che una sola ed unica sezione conica simile, e similmente posta ad un' altra data.*

366. Se abbiansi quattro punti comunque situati, come M, R, N, S [*fig.17, e 18.*], congiungendo questi, a due a due in tutt' i modi, si hanno sei congiungenti, delle quali si diranno opposte ogni due che non partono da uno stesso punto, e che perciò, prolungate se occorra, in generale, intersegansi in un punto diverso da' primi quattro; tali sarebbero le MR, SN; MS, NR; MN, RS, intersegantisi rispettivamente ne' punti Q, P, Z.

Potendo due sezioni coniche intersegarsi in quattro punti, le loro sei congiungenti saranno allora altrettante corde comuni; ond' è, che si avranno tre coppie di corde opposte co' loro tre rispettivi punti d' incontro.

## PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

367. Se due sezioni coniche s' intersegano in quattro punti; i triangoli formati in ciascuna di esse, da' semidiametri paralleli a due qualunque delle sei corde comuni opposte, risultanti dalle quattro intersezioni, ed aventi i lati diretti da una stessa parte, sono simili, e similmente posti.

Dim. Sieno M, R, N, S [*fig.* 19.] quattro punti comuni a due sezioni coniche, e sieno CH, CB, *ch*, *cb*, semidiametri dell' una, e dell' altra paralleli, per esempio, alle corde comuni opposte RN, SM, che s' intersegano in P; starà (164, 289.)

$$PR \times RN : PM \times PS :: CH^2 : CB^2 :: ch^2 : cb^2.$$

Quindi $$CH : CB :: ch : cb$$

e perciò i triangoli HCB, *hcb*, che hanno di più paralleli i lati intorno agli angoli HCB, *hcb*, saranno simili, e similmente posti.

368. Cor. Pe' punti medii U, *u* delle basi HB, *hb* de' triangoli HCB, *hcb* si conducano i semidiametri CY, *cy*, e gli altri CX, *cx* paralleli alle basi stesse; saranno (141, 261.) CY, CX semidiametri conjugati dell' una curva, al pari di *cy*, *cx*, che saranno conjugati nell' altra: e son poi quelli paralleli a questi. Dunque:

*Se due sezioni coniche s' intersegano in quattro punti, e si formino, nell' una, e nell' altra, i triangoli co' semidiametri paralleli a due qualunque delle opposte tra le sei corde comuni; i diametri condotti pe' punti medii delle loro basi, ed i paralleli alle basi stesse costituiranno, per le due curve, un sistema di diametri conjugati paralleli.*

369. Scol. 1. Se le due sezioni coniche sono entrambe ellis-

si, o l'una ellisse, e l'altra iperbole; questa conseguenza non ammette veruna eccezione: ma se le due curve sono entrambe iperboli [*fig.20.*], e tre de'quattrò punti, come N, M, S si trovino sopra una stessa iperbole, mentre il quarto R si trovi sull'opposta, allora avverrà, che a qualunque delle opposte tra le sei corde comuni si tirino i semidiametri paralleli CH, CB, uno di essi soltanto, come CH, potrà cadere sulle iperboli proposte FF′, *ff*′, e l'altro CB cadrà necessariamente sulle loro conjugate. Poichè essendo, per esempio, NR, MS le due corde opposte, cui son paralleli i semidiametri CH, CB, e CB sia il parallelo alla corda MS, che unisce i due punti M, S, situati su di una medesima iperbole FMF′; non potrà esso CB incontrare altrove nè questa curva nè l'opposta *f*R*f*′ (34). Che però HB, base del triangolo HCB, non sarà un'ordinata al diametro CY, condotto pel suo punto medio; e quindi i diametri tirati pel punto medio della sua base, e 'l parallelo alla base medesima, non saranno più conjugati tra loro, essendo per ciò necessario (261.), che i punti H, B cadano entrambi o sull' iperbole proposta, o sulla conjugata. E dovendo dirsi lo stesso delle altre iperboli opposte EE′, *ee*′, ne risulta, che in questo caso le due curve non avranno sistema di diametri conjugati paralleli. Se poi de' quattro punti si trovino due su di un' iperbole, e due altri sull' opposta; allora la proposizione starà come nel corollario precedente.

370. Scol. 2. Sostituendo a' semidiametri le tangenti parallele a due qualunque delle corde opposte, è chiaro che i triangoli formati nelle due curve dalle due tangenti, e dalla corrispondente corda di contatto sieno anche simili, e similmente posti; quindi è che la proposizione, e le conseguenze, che ne derivano, si applicano immediatamente al caso in cui una, o entrambe le curve sieno parabole.

371. Scol. 3. Essendovi tre coppie di corde comuni opposte, si avranno in conseguenza tre coppie diverse di tri-

angoli costituiti, come si è detto, nelle due curve, simili rispettivamente tra loro, e similmente posti. Quindi parrebbe, che dovessero anche esservi tre diversi sistemi di diametri conjugati paralleli: ma unico è questo sistema, come sarà dimostrato nella seguente

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

372. Unica è la direzione de' diametri conjugati paralleli, per tutte le infinite sezioni coniche, che possono passare per gli stessi quattro punti *.

Dim. È dimostrato nella proposizione 5. del presente libro, che due sezioni coniche le quali hanno un sistema di diametri conjugati paralleli, non possono averne un altro, senza essere simili, e similmente poste; il che attualmente nè si suppone, nè può aver luogo (363.); perchè, per ipotesi, le due curve s' intersegano in quattro punti. Dunque le due curve proposte da prima non potranno avere che un sol sistema di diametri conjugati paralleli; e quindi i tre diversi triangoli formati in esse, com' è prescritto nella precedente proposizione, non daranno, che una sola direzione pe' diametri i quali passano pe' punti medii delle loro basi; e del pari per quelli, che son paralleli alle basi stesse. Intanto rimanendo invariati i quattro punti M, R, N, S [*fig.19.*] per tutte le infinite sezioni coniche, che passano per essi, ne segue, che la direzione de' diametri conjugati paralleli relativa a due di tali curve, sarà comune a tutte le altre. — *C.B.D.*

373. Cor. Dunque: *Se due sezioni coniche, le quali s' inter-*

* Già risulta dalla prop. 9. e dal suo corollario, che infinite sezioni coniche possono passare per quattro punti: ma ciò si vedrà anche meglio nel seguente capitolo.

*segano in quattro punti, hanno gli assi paralleli; tutte le infinite sezioni coniche, che possono passare pe' medesimi quattro punti, avranno costantemente gli assi tra loro paralleli.*

## PROPOSIZIONE XVII.

### TEOREMA.

374. Se due sezioni coniche, che s'intersegano in quattro punti, abbiano gli assi paralleli, que' punti staranno sulla circonferenza di un cerchio.

Dim. Condotti in una delle due curve [*fig. 21.*] i semidiametri CH, CB paralleli a due qualunque delle opposte delle sei corde comuni, come NM, RS, che s'incontrano in Z, e poi congiunta HB; il semidiametro CY, condotto pel punto medio U della base HB, dovrà essere un degli assi della curva, ed in conseguenza la HB essendogli perpendicolare, i semidiametri CH, CB gli saranno ugualmente inclinati, e quindi uguali. Avendosi dunque

$$MZ \times ZN : RZ \times ZS :: CH^2 : CB^2$$

Risulterà $$MZ \times ZN = RZ \times ZS$$

e perciò i quattro punti M, R, N, S staranno sulla circonferenza di un cerchio. — *C.B.D*

375. Cor. 1. Segue da ciò, che: *Prendendo nella circonferenza di un cerchio quattro punti ad arbitrio; gli assi di tutte le sezioni coniche, che possono descriversi per que' quattro punti saranno tra loro paralleli.*

376. Cor. 2. Inoltre, è da osservarsi, che nel triangolo HCB, la CU, o CY biseca l'angolo HCB; quindi essendo le CH, CB parallele alle ZN, ZS, la retta, che biseca l'angolo NZS, sarà parallela all' asse CY; e quella, che biseca l'angolo NZR, supplemento di NZS, sarà parallela all' asse conjugato. E poichè lo stesso avverrebbe per le biscanti

gli angoli in P, o in Q, compresi da ciascun' altra coppia delle corde opposte, ne segue, che:

*Se un cerchio interseca una sezione conica in quattro punti, le bisecanti gli angoli compresi da due qualunque fra le opposte delle sei corde comuni, saranno parallele agli assi della sezione*. Laonde:

*Comunque si faccia variare la grandezza, e la posizione di un cerchio, che vada intersegando or qua or là una medesima sezione conica; le sei bisecanti de' tre angoli compresi dalle tre coppie di corde comuni opposte, saranno costantemente parallele in due diverse direzioni tra loro perpendicolari.*

377. Scol. Da ciò risulta la seguente importante proprietà del cerchio:

*Se con quattro punti comunque presi sulla circonferenza di un cerchio si completi la figura iscritta, risultante da tutte le sei congiungenti, le bisecanti degli angoli compresi dalle tre coppie di corde opposte sono parallele in due diverse direzioni, e quindi perpendicolari*.

Ed in fatti sieno M, R, N, S [*fig. 22.*] i quattro punti presi nella circonferenza di un cerchio, e Q, P, Z le tre intersezioni delle tre coppie di corde opposte: bisecando colla AB l' angolo in Z, i due triangoli ZAR, ZBN, che hanno uguali gli angoli in R, N, saranno simili, e perciò saranno uguali gli angoli in A, B. Quindi il triangolo AQB sarà isoscele, e però la bisecante dell' angolo in Q sarà perpendicolare alla AB bisecante dell' angolo in Z. E ciò basta a far conchiudere la verità enunciata.

378. Cor. 3. In virtù di queste proprietà è poi chiaro, che la prop. 13. può rendersi più generale, ed enunciarsi a questo modo: *Se una parabola è tagliata in quattro punti da una sezione conica qualunque, avente un asse perpendicolare, o parallelo a quello della parabola; la somma delle semiordinate a quest' ultimo asse, che cadono da una parte*,

*sarà uguale alla somma di quelle, che cadono dall' altra.*

Il che è evidente, potendo per que' quattro punti passare la circonferenza di un cerchio.

## PROPOSIZIONE XVIII.

### TEOREMA.

379. Se per due punti R,M [*fig.*23.], comuni ad una serie di sezioni coniche simili, e similmente poste, passi un' altra sezione conica qualunque MYR, che in generale intersegherà ciascuna delle prime in due altri punti, come N,S; N', S', *ec.*: tutte le corde NS, N'S', *ec.*, opposte alla corda RM, saranno parallele tra loro.

Dim. Essendo le sezioni coniche, che compongono la proposta serie tutte simili, e similmente poste; la direzione de' diametri conjugati paralleli, per una di esse, e per la sezione conica qualunque MYR, sarà comune a tutte le altre; ond' è che l' angolo HCB formato in essa da' semidiametri CH, CB paralleli alla RM, ed alle corde NS, N'S', *ec.* dee mantenersi invariato (368.). E però la direzione di queste corde sarà costante, e parallela alla CB.

380. Cor. 1. Quindi se nella sezione conica MRY si tiri ad arbitrio una corda NS parallela alla N'S', pe' quattro punti M, R, N, S potrà farsi passare (365.) una sezione conica simile, e similmente posta alla MRN'S'.

381. Cor. 2. Se la serie delle sezioni coniche simili, e similmente poste sia di cerchi; la corda variabile NS, opposta alla fissa MR, e la stessa MR saranno (368, e 376,) ugualmente inclinate agli assi, ma in senso inverso. Quindi, ove, in questa ipotesi, sia data la direzione della MR si ha facilmente la direzione della corda variabile, che l' è opposta.

382. Scol. 1. Nelle precedenti proposizioni si è supposto, che le due sezioni coniche s'intersegassero in quattro punti: ma le medesime possono ancora toccarsi in un punto, ed intersegarsi in due altri; ovvero anche toccarsi in due punti. E poichè in questi casi le quattro intersezioni sussistono sempre; però sussisteranno ancora tutte le verità dimostrate, con quelle leggieri modifiche, ch'è ben facile ad ognuno avvertire. Tutto ciò è evidente, atteso che nel caso del contatto debbono in quel punto considerarsi raccolte due intersezioni: ma per convincersene vieppiù basterà sostituire, nelle dimostrazioni, alla corda su cui trovansi le due intersezioni riunite, vale a dire, nel contatto, la tangente nel punto stesso, e riguardarla sempre come opposta alla corda, che unisce le due rimanenti intersezioni. Così nell'ultima proposizione, se le due intersezioni M, R comuni alla serie di sezioni coniche simili, e similmente poste, o di cerchi, si raccolgano in una, cioè a dire, che le sezioni coniche, o i cerchi si tocchino tutti in un punto M [*f.24*], allora la corda MR si cambia nella tangente nel punto di riunione M; e le corde NS, N'S' non cesseranno perciò di esser parallele tra loro.

383. E nel caso de' cerchi la tangente, e la corda variabile saranno ancora, in senso inverso, ugualmente inclinate agli assi.

384. Scol. 2. Se suppongasi, come nella ipotesi precedente, che le sezioni coniche simili, e similmente poste tocchino tutte [*fig.25*] la sezione conica MY in un punto M, ove avranno in conseguenza una tangente comune *mr*, e che di più la direzione del diametro MM', corrispondente al contatto, sia comune a questa, ed a quelle; allora le corde NS non solo son tutte parallele tra loro, ma il saranno benanche alla tangente *mr*. Quindi è che in tal caso non sia più necessario, che le sezioni coniche sieno simili, e similmente poste; essendo chiaro, che per tutte le curve di tal fatta de-

scritte colle condizioni assegnate, qualunque esse sieno, (cioè che tocchino la *mr* nel punto M, ed abbiano in comune la direzione MM' del diametro appartenente a questo punto) le corde ad esse comuni saranno costantemente parallele alla tangente *mr*.

Ma le sezioni coniche, che si toccano in un punto godono di una importante proprietà, che esporremo in fine del presente capitolo.

## PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

385. Due sezioni coniche, comunque situate in un piano, o su piani paralleli, ammettono, in generale, un sistema di diametri conjugati paralleli.

Dim. Imperocchè può sempre supporsi, che una delle due sezioni coniche proposte sia intersegata comunque in quattro punti, da una sezione conica simile, e similmente posta all'altra, e di qualunque grandezza. Allora la direzione de' diametri conjugati paralleli per le due curve, che s'intersegano, sarà la stessa per l'altra curva, dovendo solamente aversi presente il caso di eccezione notato nel §.369.

## PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

386. Le tangenti comuni due sezioni coniche concentriche sono parallele a'lati del parallelogrammo, che ha per diagonali i due diametri conjugati ad un loro diametro comune.

**Dim.** Sieno GG′, DD′ [*fig.26.*] i due diametri delle due curve conjugati al diametro comune NM, e QFE, Q*fe* le tangenti comuni; le ordinate condotte pe' contatti E,F al diametro MN dovranno incontrare questo diametro in un medesimo punto K: poichè, se sia Z il punto d'incontro della tangente FE con MN, deve aversi per l'una, e per l'altra (118,204.) $ZC \times CK = CN^2$.

Ciò posto essendo (144, 227.)

$$EK^2 : MKN :: GC^2 : CN^2$$
$$FK^2 : MKN :: DC^2 : CN^2$$

starà $EK : FK :: GC : DC$

Quindi i due triangoli GCD, EKF saranno simili, e similmente posti; e però la tangente EF sarà parallela a DG, lato del parallelogrammo GDG′D′.

E dimostrando nel modo stesso, che l'altra tangente Q*fe* sia parallela all'altro lato DG′, ne segue ciò, che si è proposto a dimostrare.

387. Cor. 1. S'indichino con E, F i semidiametri delle due curve GEN, FDM, paralleli alla tangente comune EF, che sia incontrata in T dall'altro diametro comune RS; starà (168, 290.) $TE^2 : STR :: E^2 : CR^2$

$$TF : STR :: F^2 : CR^2$$

Quindi $TE : TF :: E : F$

Ma al modo stesso si conchiude essere

$$ZE : ZF :: E : F$$

Starà dunque $TE : TF :: ZE : ZF$

Vale a dire la tangente comune RF alle due curve GEN, FDM, è armonicamente divisa ne' due punti di contatto E, F, e negli altri due T, Z, in cui è incontrata da' diametri comuni RS, MN. E perciò:

*I diametri comuni a due sezioni conicho concentriche, ed i diametri, che vanno ai due contatti con qualsiasi delle loro tangenti comuni, sono quattro rette armonicali.*

388. Cor. 2. La retta F′E′, che unisce gli estremi opposti

de' diametri i quali passano pe' contatti F, E, è, com' è chiaro, parallela alla FE, ed anch' essa tangente comune delle due curve: e così sarà pure l' altra tangente comune $f'e'$ parallela alla $ef$. Quindi: *le quattro tangenti comuni di due curve coniche concentriche formano sempre un parallelogrammo*; come or sarebbe PQP'Q'.

389. Cor. 3. In questo caso, inoltre, è pur chiaro, che da' quattro punti comuni M, R, N, S, quandochè si congiungano con rette, verrebbesi ancora a costituire un parallelogrammo; e, sia dal §.368, sia dagli altri §§.141, 261, or si scorge, che i diametri paralleli a' lati opposti di esso indicheranno le direzioni de' diametri conjugati paralleli per le due curve. Ma di più è evidente, che queste direzioni si confondano colle diagonali del parallelogrammo circoscritto PQP'Q', mentre è manifesto, che le medesime passano pel centro C; e, se uniscansi le corde tra' contatti $Ee'$, $Ff'$, queste, che al pari di QQ' sono bisecate da PC, saranno parallele tra loro, ed a QQ'. Ond' è, che la diagonale QQ' è, per entrambe le curve, conjugata alla direzione dell' altra diagonale PP'.

390. Scol. 1. Il teorema or dimostrato conduce immediatamente ad un' assai elegante soluzione dell' interessante e difficil problema di: *determinare il sistema de' diametri conjugati paralleli di due sezioni coniche comunque situate*.

Imperocchè sieno MFN, $mgn$ [ *fig.26.*] le sezioni coniche proposte, e tirato ad arbitrio in una di esse un diametro MN, si supporrà descritta intorno a questo diametro la sezione conica concentrica MGN, simile, e similmente posta ad $mgn$; e segnati nelle due curve i diametri GG', DD', conjugati al diametro comune MN, che dee considerarsi come dato, perchè arbitrario, si applicheranno alla sezione conica MFN le tangenti QF, $Qf$ parallele a DG, DG'. Compito il parallelogrammo circoscritto PQP'Q', le diagonali PP', QQ' saranno le direzioni de' diametri cercati.

391. Scol. 2. Come possa descriversi la sezione conica concentrica, di cui è detto nella precedente costruzione, si potrà rilevare dal cap. IV. del presente libro. Ma di essa può farsi del tutto a meno per tal costruzione, non richiedendosi della medesima che il solo punto G, estremo del semidiametro CG, conjugato a CM. Ed è facile a comprendersi, che se *cm* sia il semidiametro della sezione conica *mng* parallelo a CM, e *cg* il conjugato, tirando le CG, MG parallele rispettivamente a *cg*, *mg*, vengasi in tal modo ad esibire il punto cercato G.

392. Scol. 2. Sebbene la proposizione precedente non sembri applicabile alle parabole, perchè sfornite di centro, pur tuttavia se riflettasi, che il problema, di cui si è accennata la soluzione nel §. 390, riducesi, com' è evidente, a: *trovare sulle date curve due punti tali, che la tangente per l'un di essi sia parallela al diametro corrispondente all' altro, nella curva che lo contiene*; qualora l' una di esse sia parabola, o lo sieno entrambe, la soluzione di questo problema non offre più veruna difficoltà, non trattandosi allora, che di condurre all' altra curva una tangente parallela a' diametri della parabola, la cui direzione essendo unica, è però data.

393. Scol. 3. Inoltre il teorema enunciato nel §. 387 regge identicamente per due parabole, i cui diametri sieno paralleli. In fatti sia [*fig.* 27.] EF la tangente comune di due parabole così condizionate, che s' interseghino ne' punti R, M: sieno E*e*, F*f* i loro diametri corrispondenti a' contatti E, F, e T*t*, ZM quelli passanti per le intersezioni R, M. Indicando con E, F i parametri, che nelle due parabole appartengono rispettivamente a' diametri E*e*, F*f*, si avrà $ET^2 = TR \times E$, $TF^2 = TR \times F$

e quindi $ET^2 : TF^2 :: E : F$

Ma allo stesso modo rilevasi

$$EZ^2 : ZF^2 :: E : F$$

starà in conseguenza

$$ET : TF :: EZ : ZT$$

D' onde scorgesi, che la tangente comune EF sia armonicamente divisa ne' punti T, Z; ed i diametri Ec, Tt, Ff, ZM saranno perciò quattro rette armonicali, bensì parallele, e non più concorrenti, come nel caso precedente.

## PROPOSIZIONE XXI.

### TEOREMA.

394. Se due sezioni coniche si tocchino in un punto M [*fig.* 28.], d' onde si tiri comunque una retta MX, che le seghi ne' punti P, P', cui si applichino le tangenti; il luogo del concorso D di queste sarà una linea retta, che passerà pe' punti N, S, comuni alle due curve, se queste s' intersegano.

Dim. La corda comune NS producasi fino ad incontrare in T la tangente comune *mr* nel punto M: tirando le tangenti TH, TH' sarà chiaro, che le corde di contatto MH, MH' debbano coincidere; poichè ciascuna di esse dee segnare (89.) sulla NS un punto L quarto armonico in ordine agli stessi tre punti T, N, S.

Considerando dapprima la corda MH appartenente alla sezione conica MNH; dal punto E, in cui la retta arbitraria MX taglia la NS, si tiri ad H la EH, che segherà in un altro punto Q la stessa curva, sulla quale si avranno così i quattro punti M, P, Q, H. Formandosi da questi quattro punti il quadrilatero iscritto con tutte le sei congiungenti (366.) ne seguirà:

I°. Che se applichinsi le tangenti PD, QD negli estremi della corda PQ opposta ad MH; i due punti D, T, poli di queste due corde, staranno per dritto co' due punti E, F, intersezioni delle altre due coppie di corde opposte *; ond'è

* Veg. il n. XI. della nota al §. 83.

che i due punti D , F si troveranno sulla corda NS , comune alle due curve . Inoltre i quattro punti D , T , E , F saranno armonici * .

II°. Sia K l'incontro delle corde opposte PQ , MH : supponendo congiunta la KF , sarà questa retta (90.) la polare del punto E ; e quindi la corda NS sarà (89.) armonicamente divisa ne' punti E , F.

Passando dopo ciò a considerare l'altra corda di contatto MH′, appartenente alla sezione conica MNH′, e congiungendo EH′ , che taglierà questa curva in un altro punto Q′, se ne dedurranno identicamente le stesse conseguenze rispetto a' quattro punti M,P′,Q′,H′. Or dunque poichè il punto d'incontro delle due corde opposte P′H′ , MQ′ dee trovarsi su di NS, e segnarvi il quarto armonico in ordine a' tre punti E,S, N, ne segue,che questo punto dee coincidere col punto F.Di più dovendo le tangenti negli estremi della corda P′Q′ riunirsi sulla NS , e segnarvi il quarto armonico dopo i tre punti T , F , E, ne risulta, che il concorso delle tangenti in P′, Q′ coinciderà col punto D , ove concorrono le tangenti in P , Q . In conseguenza il luogo del punto D , concorso delle tangenti ne' punti P , P′ , è , come si è proposto , la retta TE , passante pe' punti N , S , comuni alle due curve.

395. Cor. 1. Se le curve sieno date pe' soli loro determinanti , senza esser descritte , ed avvenga , che per due diverse posizioni della retta arbitraria MX, si conoscano le posizioni delle tangenti ne' punti corrispondenti, ov'essa segherebbe le due curve , ( il che per altro può sempre facilmente ottenersi , come si vedrà più appresso nel capitolo IV. ), si avrebbero così due diversi punti D della locale TE , la quale rimarrebbe per tal modo assegnata. Or dovendo siffatta locale passar pe'punti comuni alle curve, quando queste s'interseghino , si può arguire di quale importanza possa , nelle

* Veg. il n. XII. della nota citata.

costruzioni de' problemi, riuscire la proprietà, che abbiamo esposta.

396. Cor. 2. Poichè la locale, di cui si tratta, ha la proprietà di passare pe' punti comuni alle due curve, è chiaro che se queste non s' intersegano, neppur la locale potrà incontrarne alcuna. Che, s' è possibile, la locale TE, nella ipotesi attuale [*fig.29.*], seghi una delle due curve, che hanno di comune il solo punto di contatto M; allora facendo passare la retta arbitraria $Mx$ per uno de' punti di sezione, come $p'$, ed essendo $p$ il punto ov' essa taglia l' altra curva, dovrebbero le tangenti in $p,p'$ concorrere sulla segante TE, nel punto $p'$; il che è assurdo.

397. Cor. 3. Che se le sezioni coniche proposte, oltre a toccarsi nel punto M [*fig. 30.*], si tocchino ancora in un altro punto N, ove perciò si saranno raccolte le due intersezioni N, S; è chiaro, che la locale TE sarà in questo caso la stessa tangente nel punto N. Quindi se invece di M si prendesse N per punto d' inflessione delle rette arbitrarie, la locale sarebbe allora la tangente MT nell' altro contatto M. Laonde:

*Se due sezioni coniche si toccano in due punti, e dall' un de' contatti si tiri una retta arbitraria, che le seghi entrambe; le tangenti ne' punti di sezione concorreranno sulla tangente comune delle due curve nell' altro contatto.*

398. Cor. 4. Infinite sezioni coniche possono descriversi, che passino per due punti dati, e tocchino una data retta in un punto dato; il che si vedrà nel capitolo IV. Segue da ciò, che infinite sezioni coniche possono farsi passare per gli stessi due punti, e che si tocchino poi tutte in un terzo punto. Supponendo dunque così descritte quante si vogliano sezioni coniche, passanti [*fig.28.*] pe' punti N, S, e toccanti la $mr$ nel punto M; la locale TE sarà comune per tutte. Da ciò risulta la seguente rimarchevole proposizione.

*Se quante si vogliano sezioni coniche passino tutte per gli*

*stessi due punti, e si tocchino in un altro; tirata una retta arbitraria per questo contatto comune, le tangenti ne' punti ov' essa incontra ciascuna delle curve concorrono tutte in un punto.*

399. Cor. 5. Se sia data di posizione una retta TE, ed un punto M sopra una sezione conica MIIQ, potranno, in conseguenza di ciò che precede, determinarsi quante si vogliano sezioni coniche, tutte tra loro tangenti nel punto M, ed aventi per locale comune la retta TE, cioè a dire tali che tirata pel contatto M una retta arbitraria MX, le tangenti nelle rispettive sezioni P, P′, P″, *ec.* concorrano sulla TE.

E tutte queste sezioni coniche si taglieranno negli stessi punti N, S, in cui la TE incontra la proposta MHQ; e quando quest' incontri non esistano, quelle sezioni coniche non potranno affatto intersegarsi.

400. Cor. 6. Intanto se la data retta TE passi per lo stesso punto dato M [*fig. 31.*], senza coincidere colla tangente *mr*, dovrà incontrare un' altra volta la proposta curva MII in un punto S; e perciò, le sezioni coniche, cui corrisponderebbe per locale la TE, si toccheranno in M, e si taglieranno in S; senza potersi incontrare altrove: mentre l' altro punto N, ch' era loro comune, or s' è riunito al punto M. Che se potesse esservi alcun' altra intersezione, la retta, che passerebbe per essa e pel punto S, in virtù del teorema, avrebbe, rispetto a tutte queste curve, la proprietà medesima, che ha la retta TE; il che è assurdo.

Ma, in tal caso, dico di più, che le curve, oltre a toccarsi in M, *in questo stesso punto debbono ancora necessariamente intersegarsi* *.

In fatti sieno MSA, MSB due di tali curve: ove entrambe, o una soltanto sia chiusa (*fig. 31, 32*); la proprietà an-

* Cioè a dire, che dall' uno all' altro lato del contatto debba scambiarsi la posizione de' loro rami per rispetto alla tangente comune in quel punto.

nunciata è manifesta ; giacchè, se il ramo AS dell' una entra nell' altra pel punto S , convien che ne sorta per M, ov' è il loro contatto , non potendo incontrarla in alcun altro punto.

E se le curve hanno entrambe rami infiniti [*fig.33*], preso sopra l' una , per esempio su BS , un punto $s$ , quanto si voglia vicino ad S, e tirata nella medesima la corda $sn$ parallela ad SM , la sezione conica descritta pe' tre punti $s$,M,$n$, simile , e similmente posta ad AMA', sarà (380 , 382) tangente di questa nel punto M , e quindi non potrà segarla in altro punto (364). Segue da ciò, che i due punti $s$ , $n$ saranno entrambi esteriori, o entrambi interiori alla curva A$a$MA'. Supponendoli adunque interiori , come nella figura , il ramo MA' sarà necessariamente, da un lato del contatto, esteriore al ramo M$n$B' , mentre dall' altra parte il ramo M$a$S , continuazione del primo, è , per l' opposto, interiore ad M$b$S, continuazione dell' altro.

Adunque nel punto M vi ha contatto , ed intersezione ad un tempo : nè questa contraddizione apparente dee sorprendere , dacchè nel contatto M , ch' è una duplice intersezione , è venuta a riunirsene una terza N ; ma di questa circostanza se ne vedrà la ragione intrinseca nel capitolo seguente.

401.Cor.7.Finalmente se la retta data di posizione TE sia parallela alla tangente $mr$ nel punto M della proposta curva MH [ *fig. 34.* ] , allora avverrà che le sezioni coniche determinate , come nel corollario 5. , avranno tutte in comune (384.) la direzione del diametro MM' , corrispondente al punto di contatto M ; ed è questa la condizione , perchè quella locale possa esser parallela alla tangente comune nel contatto M . In ogni altro caso le sarà inclinata , e dovrà perciò incontrarla in un punto.

Quindi è chiaro che la medesima condizione avrà luogo se la data retta TE coincidesse colla tangente $mr$ nel dato punto M ; nel qual punto debbono allora considerarsi raccolte tutte le quattro intersezioni tra le curve .

402. Scol. Il teorema che precede è interessante sotto molti rapporti: noi ci siamo limitati a dedurne quelle conseguenze, di cui avremo bisogno in seguito; ma da esso discendono altre importanti proposizioni, delle quali accenneremo la seguente, alla cui dimostrazione potranno i giovani utilmente impegnarsi.

*Se due sezioni coniche [fig.36.] si toccano in un punto M, e da un punto qualunque A della tangente comune mr in questo punto si tirino alle due curve le tangenti AB, AC; la congiungente i punti di contatto B, C passerà sempre per uno stesso punto D.*

403. Scol. Si è dimostrato, che due sezioni coniche non possono intersegarsi in più di quattro punti (359.); ma or soggiugniamo, che le intersezioni tra due curve di tal fatta (quando non istabiliscasi particolare ipotesi su' loro determinanti, ma che suppongasi aver le due curve una posizione qualunque) sono generalmente in numero pari. Ciò è evidente allorchè le curve sieno chiuse entrambe, val quando dire o due ellissi, o un ellisse ed un cerchio; e lo è del pari ove una solamente sia chiusa. Imperciocchè qualunque sia la curva che entri con un suo ramo, per un punto in una curva chiusa, dovrà sortirne per un altro punto; e se torna ad entrarvi, dovrà sortirne una seconda volta: sicchè sempre sarà pari il numero delle loro intersezioni. Ma questa verità non è più sì manifesta quando le due curve abbiano entrambe rami infiniti. Or per chiarire questa asserzione, e mostrare nel tempo stesso quali condizioni debbano aver luogo, affinchè due sezioni coniche possano intersegarsi in uno, o tre punti (*circostanza essenzialissima per poter riconoscere il numero delle soluzioni effettive, che ne' varii casi può avere un problema solido*), recheremo le seguenti proposizioni.

## PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

404. Se due parabole, che abbiano gli assi paralleli, s' interseghino in un punto, dovranno necessariamente intersegarsi anche in un altro punto.

Dim. Se le concavità delle parabole sieno rivolte in senso opposto, cioè a dire, che i loro rami infiniti progrediscano a parti contrarie, la proposizione non ha bisogno di esser dimostrata. Poichè, se il ramo di una parabola è entrato nell' altra, convien che ne sorta; ed è forza perciò, che l'interseghi un' altra volta.

Ma se i loro rami infiniti progrediscano per uno stesso verso [ *fig. 27.* ], la verità enunciata non è più così visibile. Intanto in tal caso le due parabole, ammettendo, com' è chiaro, una tangente comune, sieno E, F i due punti di contatto; sia inoltre R il punto ov' esse intersegansi per ipotesi, e condotto per esso il diametro comune R*t*, sia T il punto, ove questo taglia la tangente EF. Posto ciò si rinvenga sulla stessa EF il punto Z, quarto armonico in ordine a' tre punti E,T,F, alterno a T; tirando da Z una retta parallela a' diametri delle parabole, questa retta dovrà *necessariamente* incontrarle entrambe. Ma risulta dal §. 393, che l'incontro con ciascuna delle due parabole debba avvenire in uno stesso punto M di questa retta. Dunque le due curve, oltre a tagliarsi in R, debbono tagliarsi ancora in un altro punto.

405. Cor. 1. Potendo raccogliersi in una le due intersezioni, le due parabole diverranno allora tangenti; e perciò

*Due parabole aventi i diametri paralleli possono toccarsi in un punto, senza potersi altrove intersegare.*

406. Cor. 2. Si è detto *di necessità* questo secondo incontro,

perchè il punto Z essendo sempre possibile, esisterà sempre la retta ZM, su cui si tagliano di nuovo le due parabole. Ma v' ha un solo, ed unico caso nel quale il punto Z diviene inassegnabile, ed è quando il punto T cada nel mezzo di EF *; allora sarà pure inassegnabile la retta ZM, e perciò le parabole, non avranno, come prima, l' altro punto d' incontro M. Or s' indichino con E, F i parametri, che nelle due parabole appartengono a' diametri pe' contatti E, F; sarà $TE^2 = TR \times E$, e $TF^2 = TR \times F$; e quindi, essendo $TE = EF$, ne risulterà $E = F$: vale a dire, quando TR biseca EF, i parametri pe' diametri ne' punti E, F saranno uguali. Ma son pure uguali gli angoli, che i diametri stessi comprendono colle loro ordinate. Dunque le due parabole saranno (324) uguali. Segue da ciò, che:

*Due parabole aventi i diametri paralleli, ed i rami diretti da una stessa parte, s' intersegheranno in un solo, ed unico punto, se sieno uguali.*

407. Cor. 3. E due parabole così condizionate non potranno affatto divenir l' una tangente dell' altra, essendo unica l' intersezione, che aver possono tra loro.

## PROPOSIZIONE XXIII.

### TEOREMA.

408. Se due parabole s' intersegano in tre punti; dovranno necessariamente intersegarsi anche in un quarto punto.

Dim. Le due parabole ARB, aRb [ *fig.37.* ] s' interseghino ne' tre punti M, R, N, e non abbiano, s' è possibile, altro punto comune. Sieno per tanto M, N le intersezioni

* Veg. il n. 16. della nota al §. 82.

estreme, cioè quelle oltre le quali i rami progrediscono senza più incontrarsi. Ciò posto è chiaro, che ciascuna della parabole abbia un ramo infinito nell' interno dell' altra ; vale a dire il ramo MA della parabola AMRB da M verso A progredirà all' infinito nell' interno della parabola $aRb$ ; e così il ramo N$b$ di quest' ultima progredirà all' infinito nell' interno della prima . E poichè le due parabole s' intersegano in tre punti , i loro diametri non potranno (332,363. ) esser paralleli; e potrà perciò condursi ad una di esse, come ARB, la tangente PQ parallela a' diametri dell' altra. Or sulla stessa parabola ARB prendasi ovunque, a partir dal punto C , sul ramo CA , che entra , e progredisce all' infinito nell' interno dell' altra , un punto D , e vi si applichi la tangente ; questa tangente , incontrando necessariamente l' altra tangente PQ, (*perchè una parabola non può aver due tangenti parallele*) , incontrerà in conseguenza anche i diametri dell' altra $aRb$ ; e però l' è forza che la seghi in due punti , come $d$, $d'$; determinandovi un segmento $d$ R N$d'$ , chiuso dalla corda $dd'$. Ora il ramo CA , che entra pel punto M in questo segmento, e progredisce all' infinito, dovendo sortirne, e non potendo attraversare la corda $dd'$ , che l' è tangente , deve necessariamente incontrare un' altra volta la parabola $aRb$ tra il punto $d'$, e l' altra intersezione estrema N. Laonde , ec.

409. Cor. 1. Identicamente può dimostrarsi ; che se due parabole, i cui diametri son tra loro inclinati, si taglino in un punto , debbono necessariamente segarsi , al meno, in un altro punto ; e non potendo supporsi, che queste altre intersezioni sieno due soltanto, perchè allora se ne avrebbero tre in tutto , ed , in virtù della proposizione , vi esisterebbe la quarta, così :

*Se due parabole si tagliano in un punto , debbono necessariamente segarsi altrove , o in uno, o in tre altri punti.*

410. Cor. 2. Quindi può in generale conchiudersi :

*Che le intersezioni tra due parabole sono sempre in nume-*

*ro pari*; nè v'ha altra eccezione, che quella segnata al §.406, cioè di due parabole uguali aventi i diametri paralleli, ed i rami diretti da una stessa parte.

## PROPOSIZIONE XXIV.

### TEOREMA.

411. Se una parabola intersega un' iperbole in tre punti, deve, in generale, intersegarla ancora in un quarto punto.

Dim. La parabola ARB [*fig.38,39.*], e l'iperbole ERE'F' si taglino ne'tre punti M,R,N; e suppongasi che altrove non s' interseghino: sieno M, N le intersezioni estreme; sarà chiaro, che uno de' rami iperbolici debba progredire all' infinito nell' interno della parabola: sia ME questo ramo, e C*c* l'assintoto, che lo accompagna. E poichè la parabola sega l'iperbole in M, dovrà benanche segar l' assintoto in un punto *m*. Or quando questo assintoto non sia parallelo a' diametri della parabola, dovrà necessariamente incontrarla ancora un' altra volta; e però l' iperbole, che segue il corso dell' assintoto, egualmente un' altra volta incontrerà la parabola; ond' è che in tal caso esisterà necessariamente la quarta intersezione.

Se poi l' assintoto C*c* [ *fig.40.*] sia parallelo a' diametri della parabola, non potrà altrove incontrarla, ed allora neppur l' iperbole s' incontrerà più colla parabola; e perciò in questo caso particolare rimarranno tra le due curve le sole tre intersezioni M, R, N.

412. Cor.1. Al modo stesso si riconoscerà, che se la parabola taglia l' iperbole in un punto, e i diametri di quella non sieno paralleli ad alcuno degli assintoti di questa, debba necesariamente esistervi tra le due curve, al meno, un' altra intersezione; e quindi si conchiuderà come al §.409, che un'

iperbole, ed una parabola, così condizionate, debbono tagliarsi o in due, o in quattro punti: nè può avvenire che si taglino in uno, o tre punti, se non nel caso che i diametri della parabola fossero paralleli all'un degli assintoti. Dunque:

*Una parabola, ed un' iperbole possono, in generale, intersegarsi o in due, o in quattro punti; e si taglieranno in uno o tre punti solamente nel caso particolare, che i diametri della parabola sieno paralleli all'un degli assintoti dell' iperbole.*

413. Cor. 2. Quindi:

*Se una parabola toccando un' iperbole l' interseghi in un punto; dovrà, in generale, tagliarla ancora in un altro punto: ed, in particolare, non avrà luogo quest' ultimo incontro, se un degli assintoti dell' iperbole segua la direzione de' diametri della parabola.*

414. Scol. Sostituendo alla parabola, ed a' suoi diametri un'altra iperbole co' suoi assintoti, e seguendo gli stessi principii, si dedurranno le medesime conseguenze relativamente alle intersezioni tra queste due curve, cioè a dire, che:

I. *Se un' iperbole è intersegata da un' altra iperbole; i punti d' incontro tra le due curve saranno in generale, o due, o quattro: e si ridurranno ad un solo, o a tre nel caso particolare, che un assintoto dell' una iperbole sia parallelo ad un assintoto dell' altra.*

II. *E se un' iperbole, toccando un' altra iperbole in un punto, la taglia eziandio in altro punto; deve, in generale, intersegarla ancora in un secondo punto.*

415. Che se le due diverse iperboli abbiano gli assintoti tra loro paralleli, rientreranno nella classe delle curve simili, e similmente poste, le quali non possono incontrarsi in più di due punti (363.); e sarà chiaro, in questo caso, che, esistendo un' intersezione, debba necessariamente aver luogo anche l' altra.

## CAPITOLO III.

### Delle osculazioni tra le curve coniche, e quindi della curvatura ne' diversi punti di esse.

### INTRODUZIONE.

416. La dottrina delle *osculazioni* delle curve coniche non fu considerata dagli antichi geometri, per quanto apparisce da' *Conici* d'Apollonio, ne' quali sol qualche traccia se ne vede nel libro V. Nè tampoco di questo argomento occuparonsi coloro tra' moderni, che su di esse composero ampii trattati, o attesero ad investigarne nuove proprietà, tal che il Midorgio, il P. Gregorio da S. Vincenzo, il de la Hire, l'Ugenio, ed altri. E se questi nol fecero, molto meno poteva sperarsi, che se ne occupassero coloro, che di esse curve trattarono con l'analisi moderna: poichè una volta, che questi rivolgevansi a' nuovi metodi, trovavano largo compenso a speculare sulle osculazioni nell'Analisi degl'infiniti.

Ma la Geometria aveva ben dritto di richiamarsene, quasi che essa non bastasse a deciferar la natura, e la specialità di questi contatti detti *osculazioni*, in curve per le quali aveva sì mirabilmente dischiuse le proprietà, e che costituivano la principal parte de' metodi, ch' essa possiede per la risoluzione de' problemi. Ed è però, che applicatovisi a tutto potere l'egregio geometra Roberto Simson, ne ottenne risultamenti assai apprezzabili, vantandosi non poco di esservi pervenuto senza affatto ricorrere a quantità evanescenti; al qual proposito egli stabiliva come un canone, che: *Evanescentes quantitates, ubi nulla ex rei natura cogit necessitas, adhibendae non sunt*. E poco dopo passava a tacciar Giacomo Milnio, perchè di quelle erasi prevaluto *in propositionibus de circulis eandem cum sectionibus conicis cur-*

*vaturam habentibus , quae tamen magis geometrice veterum more demonstrari possunt.*

Ma le ricerche del Simson nè sembravano bastanti a completare questo argomento , nè erano tali da potersi elementarmente presentare a' giovani , che s' introducono alla Geometria sublime, per le vie segnatevi dagli antichi ; e però il Fergola limitossi, nella seconda edizione delle sue *Sezioni coniche geometriche* , ad un sol teorema , per assegnare il *raggio d' osculo , o di curvatura* in ciascun punto di una curva conica ; e poi nell' altro *trattato analitico* sulle medesime altri teoremi speciali ne diede su questo argomento , rilevandoli con la semplice e pura analisi Cartesiana.

Intanto questa volta , che ci abbiamo proposto di ridurre la presente opera sulle curve coniche ad un segno da non lasciar cosa alcuna a desiderare per l' indipendenza geometrica , impegnatosi in questo difficile, ed arduo sentiero il nostro Nicola Trudi , sembraci esservi riescito per tal modo , che non solo possa il presente capitolo *delle osculazioni* stare a fronte di qualunque trattazione possa farsene con la moderna Analisi sublime ; ma ancora superarla . Di che facciamo giudici i geometri , e coloro tra gli analisti , che si porranno a dimostrare con metodi algebrici gli stessi teoremi da noi geometricamente , e con tanta facilità , ed evidenza sviluppati .

## NOZIONI PRELIMINARI.

417. Si è fatto osservare in più luoghi del presente trattato, che una retta da segante di una sezione conica ne divien tangente, quando col variar di sito con una certa legge (come di circolare intorno ad un punto fisso, mantenersi parallela ad una medesima direzione, *ec. ec.*) avvenga, che le due intersezioni si raccolgano in una. Or poichè la retta non può intersegar queste curve in più di due punti (34.), non vi era però luogo a supporre, che in quel punto di contatto potesse per avventura riunirsi alcun' altra intersezione.

418. Ma se una sezione conica venisse intersegata da un'altra sezione conica assoggettata ad una certa variabilità, è chiaro, che possa ben avvenire, come si è già fatto altrove osservare (400, 401.), che si raccolgano in un punto non solamente *due*, ma anche *tre*, e fino a *quattro* intersezioni.

419. Or quando due sole intersezioni riunisconsi in un punto, le due sezioni coniche divengono semplicemente tangenti l' una dell' altra nel punto stesso; il qual contatto, per distinguerlo dagli altri, di cui or ora parleremo, suol dirsi di *1° ordine*

420. Che se le due curve, ravvicinandosi di più, avvenga, che alle due intersezioni, già raccolte in una, se ne aggiunga la terza, il contatto si fa allora più intimo, e dicesi di *2° ordine*. Finalmente, se le curve maggiormente accostandosi accada, che alle tre intersezioni si riunisca anche la quarta, il contatto, reso anche più intrinseco del precedente, dicesi di *3° ordine*.

421. Quindi è chiaro, che se due sezioni coniche abbiano un contatto di *1° ordine*, possano ancora intersegarsi in due altri punti, o anche avere un secondo contatto semplice, ossia di *1° ordine* (319, 321.).

Se poi esse abbiano un contatto di *2° ordine*, dovranno in generale intersegarsi in un altro punto; e finalmente se quel contatto sia del *3° ordine*, le due curve non potranno affatto altrove intersegarsi.

422. Inoltre è manifesto, che tra due sezioni coniche simili, e similmente poste non possa aver luogo, che il solo contatto di 1° *ordine* (363), cioè esser tra loro semplicemente tangenti.

423. Segue dalle precedenti considerazioni, che una sezione conica non possa aver con un' altra un contatto di ordine superiore al terzo: ma ove si considerino delle curve, che possano intersegarsi in maggior numero di punti, s' intende che possano aver luogo tra esse de' contatti anche di ordine più elevato.

424. Def. 1. Una curva, che sia in contatto con un'altra, suol dirsi più particolarmente *osculatrice* di quella; ed osculatrice *del* 1°, *del* 2°, *del* 3°, *del* 4° *ordine*, *ec.* secondochè il contatto sia *del* 1°, *del* 2°, *del* 3°, *del* 4° *ordine*, *ec.* Ma di ordinario l'osculatrice di 1° *ordine* dicesi semplicemente *tangente.*

Quando nel contatto raccolgansi tutt' i punti ne'quali l'una curva può intersegar l'altra, l' osculazione si dice *completa.* E però il contatto di 3° *ordine* tra le curve coniche è *osculazione completa* (423.).

225. La curvatura di una sezione conica, come di ogni altra curva, varia in generale per ciascun punto del suo perimetro: ma è chiaro che due curve, che si toccano, abbiano tanto più uniformi le loro curvature nel luogo del contatto, per quanto più sono vicine. Poichè dunque questa maggiore, o minor vicinanza è misurata da' contatti di diverso ordine, che possono aver luogo tra due curve (420.), e ciò sarà ancora meglio dimostrato più innanzi; quindi è, che da tali contatti traggonsi i principii per le ricerche intorno alle curvature.

426. Or quando trattisi della determinazione della curvatura di una curva in un punto del suo perimetro, il mezzo, che a prima vista si presenta, è di porla a confronto colla curvatura del cerchio, unica curva, che abbia da per tutto identica, ed uniforme curvatura; e che perciò si reputa

conosciuta, conoscendone il raggio. Adunque questo problema sarà risoluto determinando il cerchio, che sia il più vicino di tutti alla curva nel punto dato; chè in tal guisa la curvatura della curva nel punto in quistione sarà la stessa di quella del cerchio.

427. Def. II. Quel cerchio, che toccando una curva abbia nel luogo del contatto la stessa di lei curvatura, vien detto con ispecialità *cerchio osculatore* di essa in quel punto; ed il suo raggio dicesi *raggio di osculo*, ovvero di *curvatura*.

### Del contatto di 2° ordine tra le sezioni coniche.

428. Intanto a rendere vieppiù sensibile come abbian luogo le moltiplici riunioni d'intersezioni, di cui si è discorso, basta ricordare il teorema, che risulta dal §. 382, cioè che:

*Se una sezione conica qualunque AMA′ [fig. 41.] sia toccata in un punto M, da quante altre si vogliano sezioni coniche tra loro simili, e similmente poste; le varie corde NS comuni a ciascuna di queste, ed alla prima, opposte alla tangente mr in M, saranno tutte tra loro parallele.*

Or la ipotesi di questo teorema equivale a supporre, che una sezione conica fissa AMA′ sia continuamente intersegata in due punti N, S da un'altra sezione conica MBNS, la quale varii di grandezza in modo, che mantenendosi costantemente simile, e similmente posta a se stessa, rimanga nel medesimo tempo sempre tangente della prima nel punto M, o, ch'è lo stesso, della sua tangente *mr* in M. Così essendo avverrà, che la corda NS, comune alla sezione conica fissa, ed alla variabile, quantunque varii anch'essa di sito con quest'ultima, pur tuttavia conserverà sempre la stessa direzione. Debbonsi però distinguere due casi: 1°: se la direzione di NS faccia un angolo colla tangente *mr* nel punto

M ; 2° se le sia parallela. Ma per ora non considereremo, che il primo di questi due casi.

429. E poichè la sezione conica variabile MBNS può prendere, con le condizioni prescritte, infinite posizioni, è ben chiaro, che possa l'una, o l'altra delle due intersezioni N, S farsi accostare quanto si voglia al punto di contatto M, fino a coincider con esso; ed è così, che in questo punto si avrebbero allora tre intersezioni riunite in una, mentre alle due, che già costituiscono il contatto semplice, se ne aggiugnerebbe una terza. Ma è chiaro inoltre come possa facilissimamente ottenersi un tale intento; bastando per ciò condurre nella sezione conica fissa AMA', dal punto M [*fig.41, e 42.*], la corda MS parallela ad NS, e poi descrivere la sezione conica *bMb'* simile, e similmente posta ad MBNS, che passando pe' punti S, M tocchi nel secondo di essi la sezione conica *aMa'*. Per tal guisa nel punto M, considerato relativamente alle due sezioni coniche *aMa'*, *bMb'*, si saranno raccolte tre intersezioni.

430. Or quantunque questa triplice riunione d'intersezioni nel punto M, risulti ad evidenza dalle considerazioni, che precedono, pur tuttavia essa può dimostrarsi in modo assoluto, e da escludere ogni dubbio. Ed in primo luogo, ove ciò sia vero; poichè le due sezioni coniche, in virtù della costruzione, s'intersegano ancora nel punto S, avrebbero già il massimo numero di punti, che due curve di tal natura possono aver di comune (337.); e quindi dovrebbe potersi provare, ch' esse non possano affatto incontrarsi in verun altro punto. Ed è così realmente: chè se potessero tagliarsi in un altro punto D [*fig.43.*], sarebbe, pel teorema enunciato, SD parallela ad SN, e quindi ad SM; il che è impossibile.

431. Ma, in secondo luogo, v' ha un altro segno, ben più caratteristico, che poi comprova positivamente il raccoglimento delle tre intersezioni nel punto M; ed è [*fig.41, e 42*] che *le due curve aMa',bMb', non solo si toccano nel punto*

*M*, *ma ivi nel tempo stesso s' intersegano*, cosichè mentre si conserva in quel punto la qualità del contatto, nascente dalla riunione di due intersezioni, vi rimane ancora la traccia della terza, che vi è sopraggiunta. In fatti suppongasi, che da un lato del punto M il ramo $bM$ della curva $bMb'$ si trovi tra il ramo $a'M$ dell' altra curva $a'Ma$, e la loro tangente comune $mr$; se queste curve si toccassero semplicemente, come nll' ordinario, le continuazioni de' detti rami di curva $Mb$, $Ma$ dall' altro lato del punto M, dovrebbero, fino ad un certo limite almeno, serbare la stessa vicendevole posizione rispetto alla tangente $mr$, cioè a dire dovrebbe [*fig.43.*] il ramo di curva $Mb$ trovarsi tra il ramo di curva $Ma$, e la tangente $mr$. Or dovendo, per costruzione, la sezione conica $b'Mb$ passare pel punto S, ch' è sulla curva $a'Ma$; perchè possa il ramo di curva $Mb$ raggiugnere il punto S, dovrà necessariamente tagliarsi colla curva $a'Ma$ in un qualche punto D. Laonde le due curve avrebbero un altro punto comune; il che qui innanzi si è dimostrato impossibile (430.). Adunque se il ramo di curva $b'M$, sta, come si è supposto, tra la tangente $mr$, e 'l ramo di curva $a'M$, nelle loro continuazioni al di là del punto M, essi scambieranno posizione, e dovrà il ramo di curva $Mb$ [*fig.41*, *e 42.*] lasciarsi da uno stesso lato la tangente $mr$, e 'l ramo di curva $Ma$. E, viceversa, se il ramo di curva $b'M$ avesse invece quest' ultima posizione, la sua continuazione $Mb$ si troverebbe per l' opposto tra $Ma$, e la tangente $mr$. Così essendo, le due curve necessariamente si tagliano nel punto M, ove, per costruzione, si toccano al tempo stesso.

432. Poichè tre intersezioni raccolte in una costituiscono il contatto, che si è definito del 2° *ordine*, si ha che:

---

* Quando le curve, o una di esse soltanto si supponesse chiusa, la verità or dimostrata sarebbe ben più evidente: ma era d' uopo rendere la dimostrazione applicabile ad ogni caso.

*Se due sezioni coniche abbiano in un punto un contatto di 2° ordine, in questo punto si toccheranno, e s' intersegheranno contemporaneamente.*

433. E, viceversa:

*Se due sezioni coniche si toccano, e si tagliano ad un tempo in un medesimo punto, avrà ivi luogo tra esse un contatto di 2° ordine.*

434. Segue ancora da queste proprietà, che:

*Se tra due sezioni coniche vi sia contatto di 2° ordine, le loro concavità nel luogo del contatto saranno rivolte dalla stessa parte.*

Imperocchè se ivi si opponessero le convessità, sarebbero tramezzate dalla loro tangente comune, e non potrebbero più intersegarsi.

## PROPOSIZIONE XXV.

### PROBLEMA.

435. Data una sezione conica, condurle un' osculatrice di 2° *ordine* in un punto dato.

Sol. Sia M [*fig.41,42.*] il punto dato sulla sezione $aMa'$: e presi su questa due punti ad arbitrio N,S, tali che la corda NS non sia parallela alla tangente *mr* nel dato punto M, si descriva una sezione conica qualunque MBNS, che, passando pe' tre punti M, N, S, tocchi la data sezione conica, ossia la sua tangente *mr* in M *; indi tirata in quest' ultima curva da M la corda MS parallela ad NS, si descriva la sezione conica $bMb'$ simile, e similmente posta ad $aMa'$, che, passando pe' punti M, S, tocchi anch' essa in M la *mr*. Sarà, com'è chiaro da ciò che precede, $bMb'$ un'osculatrice di 2° *ordine* della curva proposta nel punto M.

* Come ciò si esegua, si vedrà nel capo seguente.

436. Cor. Dunque non una, ma infinite sezioni coniche, osculatrici di 2° *ordine*, possono condursi in un punto dato di un'altra sezione conica; ond' è che questo problema è indeterminato: ed è chiaro, che l'indeterminazione sia per due gradi; cioè a dire, che l'osculatrice, dato il punto di contatto, può assoggettarsi a soddisfare a due altre condizioni, come ad esser simile, e similmente posta ad un' altra sezione conica; a passare per due punti, o a passar per un punto, e toccare una retta; *ec., ec.* Quindi, in particolare, rimarrà determinato il problema, ove si esiga, che l'osculatrice sia un cerchio, che sarà allora il *cerchio osculatore*. Ma, atteso l' importanza di questo caso, ce ne occuperemo tra poco separatamente.

437. Intanto importa osservare, che qualunque sia la sezione conica osculatrice di 2° *ordine* di un'altra, oltre al contatto M, ch' è una triplice intersezione, deve in generale, esistervi la quarta S, come esiste in generale * la corda MS, che serve di elemento alla sua descrizione. In fatti, poichè in questo contatto vi ha pure intersezione, risultava benanche da' §§. 413, e 414, che le due curve dovessero intersegarsi in un altro punto.

438. La corda MS, comune alle stesse curve, dovendo in conseguenza di ciò che precede riguardarsi come opposta alla tangente *mr* in M, sarà dotata della proprietà del teorema del §. 394; cioè a dire [*fig. 31.*], che tirando dal contatto M una retta arbitraria MX, che le tagli ne' punti P, P', il luogo del punto D, concorso delle tangenti in questi punti, sarà la corda comune MS. Imperocchè, avendo la detta lo-

* Diciamo *in generale*, perchè è manifesto che potrebbero aver luogo le due eccezioni segnalate a' §§. 411, e 414; ma, ov' esse si verifichino, i ragionamenti, che seguono, anzichè rimanere alterati, divengono più evidenti; poichè in que' casi la corda comune passante pel contatto sarà sempre una parallela ad un assintoto di un' iperbole, talchè l'altra intersezione può riguardarsi come avvenire a distanza infinita.

cale la proprietà (396.) di passare pe' punti d'incontro delle due curve, passerà tanto per S che per M, non potendo le curve altrove intersegarsi. Adunque:

*Se una sezione conica sia osculatrice del 2° ordine di un' altra, e si tiri pel contatto una retta arbitraria, che le seghi entrambe; il luogo del concorso delle tangenti ne' due punti di sezione sarà la loro corda comune passante pel contatto.*

439. E viceversa:

*Se in due sezioni coniche, che si toccano in un punto, tirata ad arbitrio per esso una retta che le seghi entrambe, avvenga che le tangenti ne' due punti di sezione concorrano sopra una retta passante pel contatto ( diversa però dalla tangente ); questo contatto sarà di 2° ordine.*

E si era già altrimenti dimostrato (400.), che le due curve, in tal circostanza, si toccano, e si tagliano al tempo stesso.

440. Nella precedente costruzione per l' osculatrice del 2° *ordine*, si è richiesto che la corda NS non sia parallela alla tangente nel dato punto M; mentre, ove ciò si verifichi, la costruzione non è più applicabile; poichè nel condursi per M la corda MS parallela ad NS, quella corda verrà a coincidere colla tangente *mr*; e quindi nel punto M si raccoglierà benanche la rimanente intersezione S. Allora dunque il contatto non sarà più del 2° *ordine*, ma diverrà necessariamente del 3°, come sarà meglio più innanzi sviluppato.

## PROPOSIZIONE XXVI.

### TEOREMA.

441. Se due sezioni coniche sieno tra loro in contatto di 2° *ordine*, ed una di esse abbia nel medesimo punto un contatto della stessa natura con una terza sezione conica; il contatto tra questa e l'altra sarà ugualmente di 2° *ordine*.

Dim. Le due sezioni coniche [ *fig. 44.* ] AMA′, BMB′ abbiano contatto di 2° *ordine* in M : ed una terza sezione conica qualunque CMC′ abbia pur ivi contatto della stessa natura, per esempio colla prima AMA′ ; trattasi di provare, che ancora di 2° *ordine* sia il contatto tra BMB′, CMC′. In fatti, se è possibile, queste due ultime curve sieno tra loro semplicemente tangenti in M, cioè a dire i loro rami, da entrambi i lati di questo punto, serbino, almeno fino ad un certo tratto, com' è nella figura, la medesima posizione a riguardo della tangente in M; allora la locale delle tangenti delle stesse curve BMB′, CMC′, ne' punti ove son tagliate dalle rette arbitrarie condotte per M, sarà una certa retta TE, che non potrà passar per M (380).

Intanto sia S l' altra intersezione (440) tra AMA′,BMB′; la locale della stessa natura della precedente, per le medesime sarà (419.) la loro corda comune MS ; così pure, se sia R l' altro incontro tra AMA′,CMC′, sarà MR la corrispondente locale. Or sieno D,*d* i punti in cui queste due locali MS,MR sono incontrate dalla prima TE, spettante a BMB′,CMC′: tirando per essi a queste curve le tangenti DP,DP′, e *dp*, *dp*′; i punti P, P′ si troveranno sopra una retta MX passante per M, come gli altri *p*, *p*′ si troveranno sopra un' altra retta M*x* passante ugualmente per M. Or poichè il punto D è su di MS, locale appartenente alle due curve AMA′, BMB′, tirando alla prima la tangente DP″, il punto P″ dovrà trovarsi sulla stessa MX, poichè questa contiene il punto P. Quindi, per l' attual posizione della MX, segante le curve AMA′, CMC′ in P″, P′, sarà D il concorso delle corrispondenti tangenti. Ma per l' altra posizione M*x*, segante le stesse curve in *p*, *p*′, le tangenti rispettive concorrono in *d*. Dunque (395.) la retta D*d*, ossia TE, dovrebbe essere la locale per le curve AMA′, CMC′; e però una tal locale sarebbe una volta TE, ed una volta MR ; il che è assurdo. In conseguenza il contatto tra le due curve BMB′, CMC′ è neces-

sariamente di 2° *ordine*; e le medesime debbono perciò intersegarsi in M, nel tempo stesso che ivi si toccano.

## PROPOSIZIONE XXVII.

### TEOREMA.

442. Se due sezioni coniche sono in contatto di 2° *ordine*, non potrà tra esse passarne alcun' altra, che sia semplicemente tangente dell' una, o dell' altra.

S' è possibile tra gli archi [ *fig.45.* ] MA, MB di due sezioni coniche, che hanno in M contatto di 2° *ordine* vi passi nna sezione conica MC, che tocchi semplicemente nel punto stesso una delle prime, per esempio la AM. E poichè questa ivi contemporaneamente s' intersega con la BM, quest' ultima curva dev' essere necessariamente tagliata in M da CM. Quindi tra BM, e CM vi sarà contatto di 2° *ordine* (433.); e, per la precedente proposizione, tale sarà pure il contatto tra CM, ed AM, le quali perciò si taglieranno in M. Dunque non è possibile, che tra gli archi MA, MB possa passare, com' erasi supposto, alcun' altra sezione conica, che abbia in M contatto di 1° *ordine* coll' una, o coll' altra.

443. Quindi se due sezioni coniche hanno contatto di 2° *ordine*, ed una terza qualunque sia nel pnnto stesso semplicemente tangente dell' una; la medesima sarà pure semplicemente tangente dell' altra.

444. La proposizione, che precede, comprova intanto ad evidenza ciò, ch' erasi enunciato nel §.420, cioè a dire, che una sezione conica osculatrice del 2° *ordine* di un' altra le sia, nel luogo del contatto, assai più vicina di qualunque seziono conica semplicemente tangente; e ne risulta, che le curvature delle prime in quel luogo debbano stimarsi identi-

che . In fatti la circostanza di non poter tra esso passare alcun' altra sezione conica semplicemente tangente , mostra, che le curvature di quelle siensi , per così dire , immedesimate ; il che maggiormente è comprovato dal fatto stesso dell' intersezione , che accompagna il contatto. E realmente queste circostanze non potrebbero sussistere,se in questo luogo le curvature delle due curve non fossero uguali ; o , in altri termini , senza supporre coincidenti i loro archetti elementari. Nè questa coincidenza dee riputarsi contraddittoria alla prop. del §. 325 ; giacchè ivi trattasi di segmenti di grandezza finita , il che è sempre impossibile per due sezioni coniche disuguali : ma attualmente deve intendersi di segmenti infinitamente piccoli , quasichè fossero considerati come elementi delle curve.

445. Quindi , in particolare , la curvatura di una sezione conica in un punto qualunque , sarà uguale a quella del cerchio, che ha con essa in tal punto contatto di 2° *ordine*.

### Del contatto di 3° ordine tra le sezioni coniche.

446. Ritornando al teorema , dal quale nel §.428 abbiamo dedotto le nozioni intorno al contatto di 2° *ordine* , s' intenderà, che per portare al 3° *ordine* il contatto [*fig. 41*] M, tra la sezione conica fissa AMA' , e la variabile MBNS , sia necessario di determinare questa sezione conica in modo , che le due intersezioni N, S coincidano contemporaneamente nel punto M . Ora, atteso il modo di variazione assegnato (428. ) alla sezione conica MBNS , è ben chiaro , che questa contemporanea coincidenza sia impossibile, fino a che la tangente *mr* in M faccia un angolo colla corda variabile NS , esigendosi perciò , che queste rette sieno parallele . Ond' è che in tal caso non è più del tutto arbitraria la sezione conica variabile MBNS a riguardo della fissa AMA';

ma è necessario (384.) che le medesime abbiano in comune la direzione del diametro, corrispondente al punto M. Così essendo, potranno le due intersezioni N, S raccogliersi ad un tempo nel punto M, bastando per ciò di faro in modo, che la corda variabile NS coincida (401.) colla tangente *mr*. In questo caso però, non presentandosi più all' occhio la corda MS, che ha servito alla descrizione dell' osculatrice del 2° *ordine*, poichè attualmente anche l' intersezione S va pur essa confusa, e raccolta nel punto M, è necessario di ricorrere ad altro mezzo; il quale è tosto somministrato dalla proprietà di cui è dotata [ *fig.* 34. ] la corda NS comune alle due curve, cioè, che se dal contatto M tirisi ad arbitrio una retta MX, la quale seghi le due curve ne' punti P, P'; le tangenti PD, P'D in questi punti concorrono appunto su di NS.

447. Segue da ciò che la sezione conica variabile MBNS debb' essere determinata in modo, che il concorso D di queste tangenti abbia luogo [ *fig.* 35.] sulla *mr*, cioè sulla tangente comune alle due curve nel punto M. La sezione conica determinata in tal guisa, e la fissa AMA' avranno allora le loro quattro intersezioni riunite nel punto M, ove in conseguenza queste due curve avranno un contatto di 3° *ordine*.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

### PROBLEMA.

448. Data una sezione condurle un' osculatrice di 3° *ordine* in un punto dato.

Sol. Sia [ *fig.* 46. ] M il punto dato sulla sezione conica A'B'M, e condottavi ad arbitrio una corda MP', si applichi in P' la tangente P'D, che incontri la tangente *mr* in D,

d'onde si tiri comunqne su di MP′ la DP. La sezione conica ABM, che, toccando le rette DM,DP ne'pnnti M,P, abbia il suo centro C snl diametro MM′, sarà un'oscnlatrice di 3° *ordine* della proposta nel pnnto M *. Imperocchè le due curve hanno, in primo luogo, comune, per costrnzione, la direzione del diametro MM′,corrispondente al punto M, in cui si toccano; ed è così soddisfatta nna delle condizioni richieste (447.) pel contatto del 3° *ordine*.

In secondo lnogo, la locale del concorso delle tangenti ne' punti P, P′, ove le dno cnrve son segate da una retta arbitraria MX, passante per M, sarà (401.) parallela alla tangente *mr*: ma, per costruzione, questo concorso, per una posizione della MX, ha luogo sulla stessa tangente; dunque la locale sarà precisamente la tangente *mr*; ond' è che le quattro intersezioni tra le due cnrve saranno raccolte nel punto M, ed ivi perciò avranno contatto di 3° *ordine*.

449.Scol. A maggiormente confermare questa quadruplice rinnione (la qualc per altro è ora evidente, attesa la proprietà, che ha la locale de' pnnti D, di passare per le intersezioni delle curve), mostreremo ancora, che le due curve MAB, MA′B′ non possono assolutamente incontrarsi in vernn sltro punto. Ed in fatti, se altra intersezione potesse esservi, queste sarebbero (384.) necessariamente due, e star dovrebbero sopra una parallela ad *mr*: su di essa inoltre concorrer dovrebbero le tangenti in P, P′; dunque que-

* Possono facilissimamente ottenersi i determinsnti per la descrizione di questa sezione conica. In fatti, dovendo essa trovarsi iscritta nell' sngolo MDP, sarà MP la corrispondento corda di contatto; e quindi la retta, che unisce il punto D col punto V, medio di MP, segnerà il suo centro C sul diametro MM′; adunque presa CA = CM, ne sarà MA l' intero diametro corrispondente alla direz one di MM′. Inoltre se per A si conduca AL, fino a DP, parallela a DM, e poi prendasi CB parallela alla stessa DM, e media proporzionale tra DM, AL; sarà CB, com' è chiaro, il semidiametro conjugato a CM.

sto concorso avrebbe luogo su due rette diverse; il che è assurdo.

450. Cor. Risulta dal precedentemente detto, che:

*Se due sezioni coniche sono in contatto di 3° ordine, tirando pel contatto una retta arbitraria, che le seghi entrambe, le tangenti ne' punti di sezione concorreranno sempre sulla tangente comune.*

Ed è ben chiaro, che sia egualmente vera la conversa di questa proposizione.

451. Scol. 1. Potendo dal punto D [*fig. 46.*] inclinarsi ad MP' infinite rette DP, anche *infinite osculatrici di 3° ordine potranno condursi in uno stesso punto di una data sezione conica*. Laonde questo problema è del pari indeterminato: ma è chiaro, che lo sia per un sol grado, cioè a dire, che l' osculatrice di 3° *ordine*, dato il punto di contatto, può assoggettarsi a soddisfare ad un' altra condizione, come a *passare per un punto*; *toccare una retta*; *esser simile ad un'altra data sezione conica*, *cc.*, *ec.*

452. Ma laddove si esiga l' ultima delle indicate condizioni, la sezione conica, cui l' osculatrice si vuol simile, deve necessariamente esser dissimile a quella, con cui dev'essere in contatto; mentre dovendo con essa aver comune la direzione di un diametro, se le si supponga simile, le diverrebbe anche similmente posta; e si è già osservato (422.), che due sezioni coniche simili, e similmente poste non possono aver tra loro, che un semplice contatto.

453. Inoltre non potrebbe esigersi, in generale, che l'osculatrice del 3° *ordine* fosse un cerchio, mentre sarebbe allora assoggettata a due condizioni, invece di una, e 'l problema sarebbe così più che determinato. Ravvicinando ora questa conseguenza a quella del §. 436, potrà conchiudersi, che: *il contatto tra le sezioni coniche, ed i loro cerchi osculatori è, in generale, del 2° ordine*. Si è detto in generale, poichè v' ha nelle sezioni coniche, come or ora vedre-

mo, qualche punto speciale, in cui il cerchio osculatore ha con esse necessariamente un contatto di *3° ordine*.

454. Scol. 2. A misura che varia la posizione della retta arbitraria DP [*fig.46.*], varierà in conseguenza la posizione della DV, che unisce il vertice D dell' angolo MDP circoscritto all' osculatrice, col punto medio V della corda di contatto MP; e quindi varierà pure il sito del suo centro C. Ora il sito di questo centro, o quello della stessa DV deciderà ne' varii casi del genere dell' osculatrice, cioè se sia ellisse, iperbole, o parabola, qualunque sia altronde il genere della curva data. In fatti risulta dalla costruzione, che DV sia sempre la sottangente corrispondente al punto D, e DC la distanza tra lo stesso punto D, e 'l centro C.

Ora, ovunque cada il punto C, purchè sia nel verso da M ad M' (cioè nel verso cui è rivolta nel punto M la concavità della curva data MA'B'), sarà sempre DC maggiore della sottangente DV; quindi in questo caso la sezione conica osculatrice sarà ellisse, la cui concavità nel punto M sarà perciò rivolta egualmente nel verso stesso di quella della curva data.

Se poi il centro C cada in senso opposto [*fig. 47.*], sarà invece DV maggiore di DC, relazione, che caratterizza l' iperbole; ed il ramo AMB tangente di DM, in M; cioè quello, che sarà in contatto colla data curva MA'B', terrà nel punto M rivolta la concavità sua nello stesso verso di questa.

Finalmente [*fig.48.*] laddove DV risulti parallela ad MM'. queste rette non potendo incontrarsi, l' osculatrice AMB, sarà sfornita di centro, e sarà perciò parabola; la quale dovendo toccare in P la DP, avrà necessariamente la sua concavità in M rivolta come quella della curva data.

455. Riepilogando ora le conseguenze della precedente discussione risulta.

1°. *Che se due sezioni coniche sono in contatto di 3° ordine; le loro concavità nel punto del contatto saranno sempre*

*rivolte da una medesima parte, come pure avviene nel contatto di 2° ordine.*

II°. *Che innumerevoli ellissi, o iperboli osculatrici di 3° ordine possono condursi ad una data sezione conica, in un punto del suo perimetro; ed una sola parabola.*

456. Ma se la sezione conica data sia ancor essa una parabola, risulta dal num. 422, che non potrebbe condursele alcuna parabola osculatrice di 3° *ordine*; poichè sono simili sempre, e similmente poste le parabole, che hanno i diametri paralleli (332.): e ciò in fatti potea rilevarsi dalla stessa costruzione, mentre in questa ipotesi il punto P coinciderebbe col punto P′, e quindi l' osculatrice si confonderebbe colla stessa parabola data. Adunque:

*Una parabola non può avere un' altra parabola per osculatrice di 3° ordine.*

## PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

457. Se due sezioni coniche sono in contatto di 3° *ordine*, il diametro corrispondente al contatto avrà uno stesso parametro, nell' una, e nell' altra.

**Dim.** Sieno [*fig.* 46.] PQ, P′Q′ le semiordinate, nelle due curve, al diametro di comune direzione MM′, corrispondenti a' punti P, P′; e sieno C, C′ i loro centri rispettivi. Congiungendo la LC, tal retta bisecando tanto la AP, che la AM, sarà parallela alla MP. Quindi saranno simili i triangoli P′Q′M, LAC, e starà

$$P'Q' : Q'M :: LA : AC.$$

Ma per la stessa ragione, essendo simili i triangoli P′Q′A′, DMC′, sta $P'Q' : Q'A' :: DM : MC'$

starà dunque

$$P'Q'^2 : Q'M \times Q'A' :: LA \times DM : AC \times MC'.$$

Or s'indichino con P, P' i semiparametri rispettivi de'diametri MA, MA' nelle due curve; si avrà

$$P'Q'^2 : Q'M \times Q'A :: P' : MC'$$

ed è inoltre (*nota* §.448).

$$LA \times DM = CB^2 = MC \times P$$

Quindi starà

$$P' : MC' :: MC \times P : AC \times MC'$$

ovvero, per essere MC = AC,

$$P' : MC' :: P : MC'$$

Adunque i semiparametri P', P saranno uguali tra loro, come si è proposto a dimostrare.

458. Scol. Si è veduto (454.), che l' osculatrice sarà ellisse, sempre che il suo centro C cada da M verso M', cioè nel verso cui la curva data volge la sua concavità nel punto M. Or perchè quest' ellisse possa ridursi a cerchio si esige, che sia retto l'angolo, che la tangente MD, nel dato punto M, comprende col diametro MA' appartenente al punto stesso; il che può aver luogo sol quando il punto M corrisponda [*fig.* 49.] all'un de'vertici principali della sezione. Ivi dunque solamente può il cerchio aver contatto di 3° *ordine* con una sezione conica; anzi in que' punti questo contatto è necessariamente tale, non potendo essere di 2° *ordine* (440). Intanto poichè il parametro del diametro di un cerchio è quanto lo stesso diametro; perciò il suo raggio MC, ossia la distanza del suo centro C dal vertice M, ove dee toccar la curva, sarà, per l'antecedente proposizione, quanto il semiparametro dell' asse, su cui trovasi un tal vertice.

## PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

459. Se due sezioni coniche sieno in contatto di 3° *ordine*, ed una di esse abbia nel punto stesso un simil contatto con una terza sezione conica; il contatto tra questa, e l'altra sarà parimente di 3° *ordine*.

Le due sezioni coniche [ *fig.50.* ] MA, MB abbiano contatto di 3° *ordine* nel punto M, ed una terza sezione conica MC abbia simil contatto, per esempio, con MA. Condotta per M una retta arbitraria MX, che seghi le tre curve ne' punti *a*, *b*, *c*; dovranno le tangenti in *a*, *b* (450.) concorrere in un punto D sulla tangente comune *mr* nel punto M; e così pure nello stesso punto D dovranno concorrere le tangenti in *a*, *c*. Adunque le tangenti ne' punti *b*, *c* concorrendo sulla tangente comune *mr*, le curve MB, MC avranno nel punto M contatto di 3° *ordine* ( 450 ).

460. Cor. 1. In conseguenza di questa proposizione, e seguendo il metodo tenuto nelle proposizioni de' §§. 441, e 442, si dimostrerà:

I. *Che se due sezioni coniche sono in contatto di 3° ordine, ed una terza sezione conica abbia con una di esse contatto di 1°, o 2° ordine; il contatto tra l'altra, e la terza sarà pure, ordinatamente, di 1°, o 2° ordine.*

II. *E che tra esse non possa farsi passare alcuna sezione conica osculatrice di ordine inferiore.*

461. Cor.2. Da ciò rimane comprovato, che una sezione conica, la quale abbia con un'altra un contatto di 3° *ordine*, le sia, com' erasi precedentemente annunziato, in tal punto, ben più vicina di qualunque altra sezione conica, che abbia con essa, nel medesimo punto, contatto di 2° *ordine* : e

tanto maggiormente rispetto ad un' altra, che vi abbia contatto di *1° ordine*, cioè, che le sia semplicemente tangente.

462. Cor. 3. Poichè due sezioni coniche, che sono in contatto di *2° ordine*, hanno uguali le loro curvature nel luogo del contatto, a più forte ragione l' avranno uguali nel contatto di *3° ordine*; anzi può dirsi in questo caso, che l' eguaglianza di curvatura si estenda ad un tratto più sensibile, mentre non può tra esse farsene passare alcun' altra, che vi abbia pur contatto di *2° ordine*.

### Del cerchio Osculatore.

463. Quanto riguarda questo cerchio or non è che immediata, e semplice conseguenza delle teoriche generali qui innanzi sviluppate. Ma, atteso l' uso importante cui esso è destinato (427.), abbiamo creduto ben fatto esporne brevissimamente a parte le proprietà. Ed innanzi tutto si osservi, che essendo, in generale, di *2° ordine* i contatti tra le sezioni coniche, ed i loro cerchi osculatori; però le affezioni di questi debbono ripetersi appunto dalle proprietà rilevate per le osculatrici del *2° ordine*.

464. Laonde il cerchio osculatore in un punto qualunque di una sezione conica avrà i due seguenti essenziali caratteri.

I. *Esso, e la curva terranno sempre rivolte le loro curvature, nel luogo del contatto, da una medesima parte* (434.).

II. *E dovrà, in generale, il cerchio toccar la curva, e tagliarla ad un tempo nel punto, di cui si tratta; ed intersegarla in un altro punto* (432, 437.).

## PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

465. Descrivere il cerchio osculatore, in un punto di una data sezione conica.

Sol. Sia M [ *fig.* 51. ] il punto dato sulla sezione conica AMA'; e descritto un cerchio qualunque ZMY, che toccando la curva in M (o, ch' è lo stesso, la sua tangente *mr*), la seghi in due altri punti N', S', ovunque essi cadano, si tiri la corda MS parallela ad N'S'. Il cerchio *oMo'*, che, passando pe' punti M, S, tocchi in M la *mr*, sarà (435.) il cerchio osculatore cercato nel punto M, cioè quello la cui curvatura è la stessa di quella della data sezione conica, nel punto medesimo (445).

466. Scol. I. Sarebbe questa la costruzione risultante da' principii stabiliti nel §. 435; ma essa può rendersi assai più semplice, osservando:

1. Che un cerchio tangente di una curva debba avere il suo centro sulla normale corrispondente al punto del contatto, cioè sulla perpendicolare MI [ *fig.* 52. ] tirata da tal punto alla tangente *mr*.

2. E che la tangente *mr*, e la corda MS sieno ugualmente inclinate agli assi, ma in senso inverso (383.); ond' è, che se E, ed L sieno gl' incontri di queste due rette coll' un degli assi VU, il triangolo EML sarà isoscele; e sarà perciò ME uguale ad ML.

In conseguenza di queste osservazioni si avrà la costruzione seguente:

» Applicata al punto M la tangente, che incontri un de-
» gli assi nel punto E, dal centro M, col raggio ME si de-
» scriva un arco di cerchio, che tagli l' asse in un altro
» punto L; poi si conduca nella curva la corda MS pe'

» punti M, L. Se pel punto K, medio di MS, e per l'al-
» tro M si tirino alle MS, ME le perpendicolari KO, MO,
» rispettivamente, il punto O, in cui s' incontreranno, sarà
» il centro del cerchio osculatore nel dato punto M; ed
» MO ne sarà in conseguenza il raggio * .

467. Questa costruzione sebbene elegante, non è però indipendente dalla curva, poichè concorre ad effettuarla il punto S, che le appartiene; e può benissimo rendersi più semplice sottraendola dalla necessità di questo punto. Si osservi a tal uopo, che se per M si tiri all' asse l' ordinata MHG, sarà EG tangente, al pari di EM, e parallela ad ML, ossia ad MS; laonde, se pel punto G si conduca il diametro GU, questo diametro dovrà passare pel punto K, medio di MS. Che però risulterà la seguente altra costruzione:

» Condotta all'asse la perpendicolare MH, e prolungata
» in G, sicchè sia HG uguale ad HM, si tiri il diametro
» GU, ed inoltre la MK parallela alla EG; indi dal pun-
» to K, incontro di queste due rette, si elevi su di MK
» la perpendicolare, che incontri in O la normale MI;
» sarà O il centro, ed OM il raggio del cerchio oscula-
» tore nel punto M **.

468. Scol. 2. Le precedenti costruzioni divengono inapplicabili al caso, in cui il punto dato M corrisponda all' un de' vertici principali della curva; poichè allora la corda MS si confonderebbe colla tangente nel vertice stesso. Or ciò tiene alla circostanza, che in questi punti il cerchio osculatore ha necessariamente colla curva contatto di 3°. *ordine* (458.), raccogliendovisi quattro intersezioni.

* La presente costruzione pel cerchio osculatore, venne dall' illustre geometra di Berlino sig. Steiner proposta a dimostrare al nostro Trudi, ne' termini precisi, come qui è recata.

** Quest' altra semplicissima, ed elegante costruzione, l' abbiamo poi trovata coincidente con quella data dal Simson nelle sue *Sectiones conicae*; ma il modo come noi vi siano pervenuti, è ben diverso da quello tenuto dal geometra inglese.

Adunque, in questi casi, sarà cerchio osculatore quello il cui centro è distante dal vertice di quanto è il semiparametro dell' asse corrispondente (458.); e per essere tal contatto del *3°ordine*, questo cerchio sarà assai più vicino alla curva di quanto il sarebbe s' ei potesse avervi contatto di *2°ordine*; talchè può dirsi, che ne' vertici principali delle sezioni coniche la curvatura sia, per un tratto più sensibile, identica a quella del cerchio osculatore.

469. Scol. 3. Le considerazioni esposte ne' numeri da 428 a 434, per le osculatrici del *2°ordine*, applicate al caso del cerchio, divengono più semplici, più sensibili, e più evidenti Ma pure, ad abbondanza, aggiugneremo ancora qualche altra riflessione per questo caso speciale.

Supponiamo adunque, che ad un punto M di una sezione conica [*fig.53.*] siasi condotta la normale MI, indefinita verso quella parte ove la curva rivolge la sua concavità; e presi in essa da M verso I i punti B, C, D..., da questi come centri, con gl' intervalli in M, sieno descritti i cerchi, che saranno tutti tangenti della curva nel punto M; sarà chiaro, che alcuni di essi (a seconda del raggio) dovranno cadere dalla parte interna, cioè dalla parte concava della curva, ed altri caderne al di fuori *.

Ciò posto, si comprende facilmente, che nella successiva variazione del sito del centro, il cerchio da interno divenendo esterno alla curva, dee realmente una volta, nell' eseguirsi un tal passaggio, avvenire la coincidenza di due loro archetti elementari, relativi al punto del contatto; e quindi la curvatura del cerchio, che vi corrisponde, essere uguale a quella della curva nel medesimo sito. Or siffatta co-

* E ciò deve intendersi, relativamente al luogo del contatto, cioè che ivi il cerchio, tra certi limiti almeno, ossia per un certo arco di esso, debba, da' due lati del contatto, essere, o tutto interno, o tutto esterno alla curva.

incidenza non può aver luogo, che col solo cerchio osculatore, il quale, avendo sol esso la proprietà di toccare, e segar la curva ad un tempo ( *464.n.II.* ), è come il limite, che separa i cerchi interiori dagli esteriori; e quello appunto pel quale avviene il loro passaggio da una parte all' altra della curva : perchè tra esso, e la curva non può passare alcun altro arco di cerchio. E queste considerazioni confermano per altra via, e pongono in maggiore evidenza la proprietà de' cerchi osculatori di misurare la curvatura di una curva ne' varii suoi punti, e possono ben anche estendersi al caso generale delle sezioni coniche osculatrici del 2° *ordine*.

470. Sia adunque B il punto in cui la normale MI interseга l' asse principale AU (maggiore per l'ellisse, primario per l' iperbole); sarà chiaro, che i cerchi i cui centri cadono tra' limiti M, B, sieno tutti interni alla curva, toccandola solo in M, senza incontrarla altrove; mentre il cerchio descritto col centro B, e col raggio BM dovrà pur toccarla nell' altro estremo G della semiordinata MG all' asse AU. E però questo toccando la curva in due punti, non potrà segarla in altro punto (360.), e le rimarrà tutto al di dentro; ond' è, ch' esso comprenderà tutti gli altri cerchi, i cui centri cadano tra i limiti M, B, e che toccheranno solamente la curva in M. Adunque il cerchio del centro B è il primo, che comincia ad incontrar la curva altrove, toccandola; e da ciò risulta, che il centro O del cerchio osculatore, che dee segar la curva non solo in M, ma anche in altro punto, dee cadere da B verso I, cioè, *dalla parte dell'asse principale opposta a quella, in cui trovasi il punto M.*

471. Quindi se la curva sia un' ellisse, e C il punto in cui la normale MI incontra l' asse minore; sarà questo punto evidentemente il centro del maggior de' cerchi esteriori, che oltre a toccar la curva in M, possono incontrarla altrove : mentre questo cerchio dovrebbe toccar pure esternamente la curva nell' altro estremo D dell' ordinata MD all' asse minore.

E da ciò vedesi, che il centro O del cerchio osculatore in M dee cader tra i limiti B, C, cioè:

*Il centro del cerchio osculatore per un punto dell'ellisse trovasi a parte opposta dell' asse maggiore, e dalla stessa parte dell' asse minore*. In somma, *trovasi sul segmento della normale, che rimane interposto tra' due assi*.

472. Scol. 4. Le costruzioni recate per la determinazione del centro, e del raggio del cerchio osculatore nulla lasciano a desiderare, per quanto riguarda la semplicità, e l'eleganza geometrica: ma le medesime non sarebbero sufficienti ove si cerchi un valore quantitativo, ossia aritmetico del raggio medesimo; il che specialmente occorre nell'applicar la presente teorica. Ed è però, che passeremo ad occuparci di quest' oggetto, e di qualche altro, che immediatamente ne dipende.

## PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

**473. Il raggio di curvatura in un punto qualunque di una sezione conica è uguale al cubo della corrispondente normale, terminata all'un degli assi, diviso pel quadrato del semiparametro dell'asse medesimo.**

Dim. Eseguita la costruzione del §. 467, per assegnare geometricamente il raggio d'osculo MO [*fig. 54. n. 1, e 2*] nel punto M della curva conica AMG, il cui asse sia VU, e V il vertice, ME la tangente in M, che incontri l'asse in E, EG la corrispondente all'altro estremo dell' ordinata MG; ed essendo R l'intersezione della normale GB con MK, risulterà il triangolo GMR simile a GBH, e quindi a GEH. Laonde si avrà, GM, o 2GH : MR :: EG : GH, e però $2GH^2 = MR \times EG$. Ma è poi

$$EG : GH :: GB : BH$$

e quindi

$$2EG^2 : 2GH^2 \text{, o } MR \times EG :: GB^2 : BH^2.$$

Adunque si avrà

$$2EG : MR :: GB^2 : BH^2 \qquad (1)$$

Or s' indichi con P il semiparametro pel semiasse VU, si avrà (161, e 222.):

Caso 1. — *Per l' ellisse, o l' iperbole* [*fig.n.1.*].

$$HU^2 : HB^2 :: VU^2 \text{, o } HU \times EU : P^2$$

e quindi, permutando, e riducendo

$$HU : EU :: HB^2 : P^2 \qquad (2)$$

E quest' analogia composta con la (1) darà

$$2EG \times HU : MR \times EU :: GB^2 : P^2 \qquad (3)$$

Ciò posto, congiunto l' altro estremo D del diametro GUD col punto M, sarà la MD parallela alla HU, e doppia di questa; che però starà, pe' triangoli simili UEG, DMK, $EG : EU :: MK : MD$, o $2HU$; e quindi $2EG \times HU = MK \times EU$; e questo secondo rettangolo sostituito al primo termine nell' analogia (3), darà

$$MK : MR :: GB^2 : P^2$$

Ma pe' triangoli simili MOK, MBR sta

$$MK : MR :: MO : MB$$

ed è $\qquad GB = MB$.

Adunque si avrà

$$MO : MB :: MB^2 : P^2$$

e quindi $\qquad MO = \dfrac{MB^3}{P^2}$.

Caso 2. — *Per la parabola* [*fig.n.2.*].

Essendo $HB = P$, e pel parallelogrammo EK essendo $2EG = MK$, l' analogia (1) diviene, in questo caso,

$$MK : MR :: GB^2 : P^2$$

dalla quale, continuando lo stesso ragionamento, che pel caso precedente, si perverrà al medesimo risultamento.

474.Cor.1. La stessa poc' anzi recata ultima proporzione dà luogo a' teoremi segnenti :

I. *Il raggio di ourvatura , per un punto qualunque di una sezione conica, sta alla normale terminata ad un asse, in duplicata ragione della stessa normale al semiparametro di quest' asse .*

II. *I raggi d' osculo pe' diversi punti di una curva coniea, sono come i cubi delle corrispondenti normali terminate ad uno stesso asse .*

475. Cor. 2. Poichè il quadrato della normale pareggia quelli della sunnormale , e dell' ordinata corrispondente ; dovrà , nel vertice principale di nna cnrva conica , ove l'ordinata svanisce , la normale pareggiar la sunnormale . Ed essendo ivi questa la metà del parametro principale ( 60 , 161, 222 ) , sarà pur tale il valore della normale ; dal quale , sostituito nella espressione del raggio d' osculo ottenuta nel teorema , risulta , che ancor questo sia in tal punto quanto il semiparametro principale : come per altre vie si era direttamente già mostrato nel §.458.

476.Scol. Sia [*fig.55.*] F un fuoco della sezione conica : conducendo al pnnto M il ramo FM , e tirando su di esso da B la perpendicolare BS , sarà ( 107 , 195 , 315 ) MS uguale a P. Laonde starà

$$MO : MB :: MB^2 : MS^2 \quad (474.I.)$$

Or dallo stesso punto B si elevi sulla normale MB la perpendicolare , che incontri il ramo MF in L , sarà

$$MB^2 = ML \times MS$$

e con ciò starà

$$MO : MB :: ML : MS$$

d' onde risulta , che se congiungasi la OL , sarà questa retta parallela alla BS ; ed in conseguenza l' angolo MLO risulterà retto al pari di MSB .

477.E da tal proprietà ricavasi la seguente altra semplicissima , ed elegante costruzione pel centro , e pel raggio del

cerchio osculatore in un dato punto M di una sezione conica :
» Condotto per M il ramo MF, e la normale MI, si ele-
» vi a questa dal punto B, ov' essa incontra l' asse de' fuo-
» chi, la perpendicolare BL, e dall' incontro L di questa
» col ramo MF s' innalzi sullo stesso ramo la perpendico-
» lare ; il punto O, ove questa incontrerà la normale, sarà
» il centro, ed MO il raggio del cerchio osculatore in M.

## PROPOSIZIONE XXXIII.

### TEOREMA.

478. Il cerchio osculatore, per un punto qualunque di una sezione conica, taglia dal diametro, che passa pel punto medesimo, e verso questo, una parte uguale al suo parametro.

Dim. Sia MT [ *fig.56. n. 1, e 2.* ] la corda intercettata dal cerchio osculatore sul diametro MY della curva, che passa per M ; e sieno :

Caso 1. *per l' ellisse, o l' iperbole* [*fig.n.1.*].

UV, UX i semiassi conjugati, ed UN il semidiametro conjugato all' altro UM, cui sarà però perpendicolare la normale del punto M, in Z ove l' incontra. Laonde il parallelogrammo MN essendo rappresentato da $UN \times MZ$, sarà $UN \times MZ = AV \times UX$ (148, e 268.), ed

$$MZ : VU :: UX : UN$$

Ma sta pure $$MB : UN :: UX : UV \text{ *} \qquad (1)$$

Quindi, componendo quest' analogia con la precedente, si ha

$$MZ \times MB = UX^2$$

ovvero, dinotando con P il semiparametro pel vertice V

$$MZ \times MB = VU \times P$$

* Veg. il n. 1. della *nota a'* §§. 196, e 316 in fine del volume.

Ciò posto, sia O il centro del cerchio osculatore della curva nel punto M, starà (473.)

$$MB^2 : P^2 :: MO : MB :: MO \times MZ : MB \times MZ$$

e quindi

$$MB^2 : MO \times MZ :: P^2 : MB \times MZ :: P^2 : P \times VU :: P : VU.$$

Ma dall' analogia (1) si ha ancora

$$MB^2 : UN^2 :: UX^2 : VU^2 :: P : VU.$$

Adunque sarà $MO \times MZ = UN^2$.

Or tirisi da O la perpendicolare OQ alla MT, risulteranno simili i triangoli MOQ, MUZ; e quindi si avrà $MQ \times MU = MO \times MZ = UN^2$. E dinotando con $P'$ il semiparametro del diametro MY si ha pure $P' \times MU = UN^2$. Adunque sarà $P' = MQ$, e $2P' = MT$, come nel teorema erasi cnunciato.

Caso 2. — *per la parabola* [*fig. n. 2.*]

Essendo $MO : MB :: MB^2 : P^2$ (473.); se tirisi BF parallela ad OQ, starà ancora $MO : MB :: MQ : MF$; e per essere $MF = BH = P$, starà $MB^2 : P^2 :: MQ : P$, ed $MB^2 = MQ \times P$. Ma $MB^2 = P \times P'$ *. Adunque dovrà essere $MQ = P'$; e quindi MT sarà il parametro del diametro MY.

479. Cor. 1. Indicando con N la lunghezza della normale, terminata ad un asse, per un punto qualunque di una curva conica a centro, con P il semiparametro dell' asse medesimo, e con R il raggio di osculo, dal §.473 si ha $R = \frac{N^3}{P^2}$, nella quale espressione di R ponendo $\frac{C^2}{A}$ invece di P, ove A rappresenti il semiasse del parametro P, e C il conjugato, sarà $R = \frac{A^2 N^3}{C^4}$.

480. Cor. 2. Inoltre osservando, che l' angolo MOQ è uguale all' altro de' semidiametri conjugati MUZ, ed indi-

* N. 6. della nota poc' anzi citata.

# CAPITOLO IV.

## Della esibizione delle curve coniche.

### INTRODUZIONE.

484. L' Analisi geometrica, o algebrica, che conduce allo snodamento de' problemi *solidi*, non fa che assegnare una qualche proprietà della locale, o delle due locali, dalla cui intersezione debbono risultare i punti soddisfacenti al quesito; e però sì nella Geometria antica, che nella moderna è di assoluta importanza la ricerca generale di esibire una curva conica da' suoi convenevoli determinanti. E questo artifizio, essendo di pura composizione, alla sola Geometria si appartiene; sicchè ancor quando con l' Analisi algebrica siesi pervenuto all' equazione al problema, essa lo abbandona (poichè ivi termina la sua giurisdizione) al dominio della Geometria. Da che può comprendersi con quanto poco accorgimento taluni a' giorni nostri trascurino di studiare, e di esercitarsi ne' mezzi, che questa possiede: debbono costoro ignorare, che la Geometria, sovrana ne' problemi della quantità continua, non ammette in suo dominio l' Algebra, se non come una coadjutrice atta ad abbreviare in parecchi casi i suoi ragionamenti, per l' analisi sola di un problema. E ben ragionevolmente, ancor prima che la cosa si fosse spinta tant' oltre come al presente, il dotto geometra inglese Samuele Horsley, parlando di costoro, diceva: *Quam sane veterum analysin juniores si diligentius excoluissent, quae ejusdem generis sunt, si non majora etiam, et magis subtilia, facilius multo et ipsi invenissent, et aliis in scriptis suis luculentius tradidissent. Etenim speciosa quae dicitur analysis; qua confisi post Cartesium fere omnes veteres magistros ausi sunt deserere, ut ut nihil non promittat, quasi aequationum ope omnia efficienda essent, revera manca et im-*

*perfecta est , et sine Geometria non nisi ad pauca utilis , utpote quae pars est tantummodo, vel fragmentum potius verae et absolutae analyseos* ( Eucl. *Data* pag.109. ).

485. Or poichè nell'antica Geometria non riconoscevasi altra esibizione delle curve coniche, se non quella per sezione del cono *, che è, come fu detto nella *Storia delle sezioni coniche* (*n*.7.), la più naturale ed anche la più geometrica, non potè però Apollonio tralasciar ne' suoi *Conici* l'importante problema di: *assegnare in un cono una data sezione conica* **: il che egli eseguì pel solo cono retto; chè per altro era bastevole allo scopo importante di comporre i problemi *solidi* , adoperandovi, come essi dovevan fare, i coni in cui le locali coniche, risultate dall'analisi geometrica per mezzo de'loro determinanti , dovevano assegnarsi , affinchè combinando quelli risultassero ancor queste tra loro combinate. Ed il Fergola al modo Apolloniano si era attenuto, nella seconda edizione delle sue *Sezioni coniche*, come avevamo ancor noi ritenuto in tutte le altre fino alla presente.

486. Ma resa da' moderni più comoda ed agevole una tale esibizione , da poter direttamente descriver le curve coniche nel piano, di cui tra poco diremo , il suddetto problema rendevasi puramente speculativo, e però conveniva darne una soluzione generale , come verrà recata nel presente capitolo, la cui eleganza la rende anche superiore all' Apolloniana , che aveva luogo pel solo cono retto , com'è stato detto.

---

* Per comprova di ciò , si riscontrino le prop. 52 , 53 , 54 del lib. I. *Conicorum* di Apollonio , dove si vedrà il problema di : *Descrivere nel piano una data sezione conica* ridotto a quello di assegnare quel cono , che incontrandosi col piano ne risulti per sezione la curva conica richiesta . Ma posteriormente essi dovettero ingegnarsi a rinvenire qualche mezzo meccanico di descriverle nel piano ; poichè troviamo , per la parabola così detto da Eutocio : *Describitur autem parabole circini ope ab Isidoro Milesio mechanico praeceptore nostro inventi, effectique , in commentario , quem in Heronis librum de fornicatis parietibus conscripsit.*

** Prop. 28 , 29 , 30 lib. VI.

487. Si è poi ancor detto, che più comoda ne fosse la descrizione nel piano, che da proprietà semplicissime delle curve coniche deriva, sia che voglia eseguirsi col maneggio di strumenti congegnati all' uopo, sia che cerchisi assegnare una serie di punti, che alla curva appartengano, prossimissimi tra loro; da che il perimetro di quella risulti fissato: il qual modo sebben si corrisponda all' indefinito corso della curva, l' è però assai faticoso, ed ancor tale da distruggere quella legge di continuità, che nel perimetro di essa deve aver luogo.

488. Oltre a ciò il problema della descrizione di una curva conica talvolta si fa dipendere da date condizioni, non immediate per la descrizione; ma tali, che da esse può discendersi a determinanti per questa: di che si ha principalmente bisogno ne' problemi meccanici, che riguardano l'Astronomia; e di ciò verrà trattato nella sez. III. del presente capitolo, desumendone le soluzioni, in modo uniforme, ed assai elegante, da quella speciosa proprietà dell'esagono iscritto in una curva conica, che il Pascal seppe rinvenire, senza nè farci noto il modo come vi pervenne, nè averla convalidata con la convenientc dimostrazione.

489. Def. I. Una curva si dirà geometricamente esibita, se venga per tal modo assegnata, che a ciascun punto di essa possa competere ogni sua proprietà.

Tale è il cerchio descritto secondo il post. 3. di Euclide; e tali sono ancora le sezioni coniche nel modo indicato nel §. 17.

490. Def. II. Si dirà poi una curva esser *descritta meccanicamente*, se il suo perimetro si ottenga per mezzo di uno strumento congegnato su di una proprietà essenziale di essa, ossia che la distingua da qualunque altra anche affine nella conformazione.

Tale è la descrizione del cerchio per mezzo del compasso; e quella delle curve coniche per mezzo di que' meccanismi, che in appresso dinoteremo.

491. Scol. Si vede che questa seconda maniera vada soggetta alle imperfezioni inseparabili dagli strumenti, che si adoprano, e che debba risultar limitata, come limitati possono essere tali strumenti: sicchè siffatta esibizione non possa corrispondere nè all'esattezza, nè alla generalità, che nelle considerazioni geometriche si ricerca; ma solamente riescir utile alla pratica. E da ciò apparisce quanto mal si comportino coloro, che nelle istituzioni geometriche assoggettano le costruzioni, o anche le dimostrazioni al maneggio del compasso, e della riga, formando di una scienza esatta, e generale una Geometria solamente da tavolino, ed assai imperfetta.

492. Def. III. Una curva si dirà *descritta per punti*, se valendosi ancora di una sua proprietà caratteristica, si cerchi assegnare una serie di punti prossimissimi l'un l'altro, che ne valgano a rappresentare in certo modo il perimetro.

493. Scol. 1. Si vede bene, che in tal caso la continuità della curva risulti alterata: ma ciò occorre spesso per gli usi a farne.

494. Di tutte le suddette descrizioni passeremo ad occuparci nelle seguenti *sezioni*.

495. Scol. 2. Secondo le definizioni 2 e 3 molti mezzi meccanici si potrebbero adoperare per la descrizione di una curva conica nel piano per moto organico; e moltissimi per assegnazione di punti *: ma noi non esporremo, per l'una, o per l'altra descrizione, che il modo più semplice, e però più comunemente adottato da' geometri, non solo per la costruzione de' problemi *solidi*; ma anche da coloro, che hanno stimato conveniente il trattar delle proprietà di tali curve partendo dalla loro descrizione nel piano.

---

* Alcuni di questi si potranno riscontrare nelle *Sectiones conicae* del de la Hire, il quale v'impiegò tutto il lib. IX.

## *SEZIONE I.*

## *Del modo di esibire una data curva conica, per la sezione di un dato cono.*

### PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA.

496. Segare un dato cono con un piano, sicchè ne risulti una parabola data.

*Cioè, della quale ne sia dato il parametro dell' asse.*

Sol. Sia DAC [*fig.57.*] il triangolo per l'asse, e per l'altezza nel cono dato, la cui base sia il cerchio BFC; e ritrovato in ordine alla base BC di esso, ad un lato BA, ed al parametro P della data parabola la quarta proporzionale BD, che si tagli sulla BC dal punto B, incontro della base BC col lato BA, si tiri per D la DE parallela ad esso lato BA. Il piano FEG perpendicolare all'altro ABC, condotto per la ED, segnerà nel cono la parabola richiesta (24.).

Dim. Imperocchè essendo P : BD :: BC : BA :: DC : DE, si ha $P \times DE = BD \times DC = FD^2$; poichè la comune sezione FG de' due piani FEG, BFC perpendicolari al terzo BAG dee risultar perpendicolare a questo, e quindi alla BC.

Laonde la curva FEG sarà la parabola richiesta.

497. Scol. 1. Risulta dalla costruzione esser sempre possibile il proposto problema, cioè che qualunque sia il cono dato, vi si possa sempre assegnare una parabola di dato parametro.

498. Scol. 2. Se la quarta proporzionale C*d* si fosse presa in ordine a BC, CA, e P, e tagliata però sulla CE dal punto C, ne sarebbe risultata un'altra parabola *feg* identica alla FEG. E da ciò rimane stabilita la natura di tal problema.

## PROPOSIZIONE XXXV.

PROBLEMA.

499. Segare in un dato cono un' ellisse simile ad una data.

*Cioè, con gli assi in data ragione* (333.).

Sol. Le rette M,N sieno [*fig.58.*] i termini della ragione dell' asse primario al secondario dell' ellisse richiesta, in ordine a' quali si trovi la terza proporzionale P; sicchè starà P : M :: $N^2$ : $M^2$. E preso nella base BC del triangolo ABC per l'asse, e per l'altezza del cono proposto il punto D ad arbitrio, trovisi in ordine a P, M, e DC la quarta proporzionale, la quale dovendo risultare maggiore di DC (*A.El.V.*), si tagli sulla DC prolungata in G, come la DG; e costituito su questa DG il segmento di cerchio capiente un angolo uguale ad EBD, esso interseghi il lato AC del triangolo EAC in F.

Congiunta la FD, questa prolungata dovrà, com' è chiaro, incontrare l'altro lato AB del triangolo ABC al di sotto del punto B, e quindi del vertice A: e sarà tal retta la comune sezione del triangolo ABC col piano ad esso perpendicolare, che intersegando il cono dato vi produrrà l'ellisse richiesta(25).

Dim. Imperocchè essendo simili i triangoli BDE,FDG si ha BD : DE :: DF : DG; e quindi il rettangolo di BD in DG sarà uguale all' altro di DE in DF. Laonde serberà ad essi ugual ragione l' altro rettangolo di BD in DC, o sia il quadrato di HD, che gli è uguale, per essere la comune sezione HD de' piani RHC, EHF semiordinata comune alla curva EHF, ed al cerchio BCH base del cono. Quindi si avrà $HD^2$ : EDF :: BDC : BDG, cioè :: DC : DG :: $N^2$ : $M^2$; e però l' ellisse EFH sarà la richiesta.

500. Scol. 1. Dovendo la DG risultar maggiore della DC, com' è stato detto nella costruzione del problema; il seg-

mento circolare DFG dovrà incontrar sempre il lato AC in un sol punto, che soddisfa al problema, il quale sarà però sempre possibile. E compiendo l'intero cerchio DFG$f$, questo intersegherà un'altra volta il lato AC con l'arco del segmento circolare D$f$G, supplementale di DFG, e congiunta la D$f$ darà il diametro $e$D$f$ dell'ellisse succontraria, e simile alla proposta. Com'è facile rilevarlo con una dimostrazione analoga a quella del problema.

501. Scol.2. Volendosi a dirittura assegnare nel cono dato un'ellisse data, e non già simile ad una data.

Esibita, con la costruzione del precedente problema, l'una di queste, dell'asse EF, cui la richiesta dee risultar parallela se dall'uno de' punti E, o F si tagli EK uguale all'asse maggiore della data ellisse, e si conduca KF' parallela al lato AE, e quindi tra i lati dell'angolo BAC si tiri la F'E' parallela ad EF; il piano condotto per questa retta F'E' perpendicolare a quello del triangolo BAC, segnerà, com'è chiaro, nel cono proposto l'ellisse data.

## PROPOSIZIONE XXXVI.

### PROBLEMA.

502. Segare un dato cono con un piano, sicchè abbiasi per sezione un'iperbole simile ad una data.

*Cioè, con gli assi in data ragione.*

Sol. La ragione data dell'asse primario al secondario dell'iperbole richiesta venghi espressa per quella di M ad N [*fig. 59.*], in ordine alle quali rette si ritrovi la terza proporzionale P; sarà M : P la ragione dell'asse primario al suo parametro; e però starà $M : P :: M^2 : N^2$.

Ciò posto, prendasi nella base BC del triangolo BAC, per l'asse, e per l'altezza del dato cono, il punto qualsivo-

glia G, e dividasi la CG in D nella ragione di P : M, tal che stia P : M :: DC : DG . Descritto sulla GD il segmento di cerchio capiente l' angolo quanto ABC, si unisca il punto D con l' altro ove quel segmento interseca il triangolo ABC , quello per appunto, ch'è adiacente al punto C,e sia F. Il piano condotta per la FD perpendicolarmente a quello del triangolo per l'asse ABC,segnerà nel cono dato l'iperbole richiesta.

Dim. Imperocchè primieramente essendo i due angoli GDF, GFD minori di due retti , il dovranno del pari essere i due GDF, ABD ; e però la retta DF dovrà convergere col lato AB al di sopra del vertice ; e quindi la sezione prodotta nel cono dal piano suddetto per la FD dovrà essere iperbole (27). Ed essendo simili i triangoli EBD, FDG, starà ED:DB::DG : DF, ed il rettangolo di ED in DF sarà uguale all' altro di BD in DG ; che però dovendo essi serbare ugual ragione all' altro rettangolo di BD in DC, si avrà $ED \times DF : BD \times DC :: BD \times DG : BD \times DC :: DG : DC$. Ma il rettangolo BDC pareggia $DH^2$, pel cerchio BHC base del cono. Adunque starà

$$ED \times DF : DH^2 :: DG : DC :: M : P :: M^2 : N^2$$

E però l' iperbole HFK sarà la richiesta.

503. Scol. 1. Potendo il segmento di cerchio GFD intersegare l' un lato del triangolo BAC in due punti , o toccarlo , o non incontrarlo affatto ; si vede da ciò , che potranno ottenersi , verso uno stesso lato, o due iperboli simili ad una data, o una sola , o ancor nessuna. E similmente potrebbe avvenire con l' altro lato AB, quando la costruzione si fosse fatta verso questo. E questa determinazione, che qui ci siamo limitati a rilevarla dall' effettiva costruzione del problema, dipende dalle due condizioni del rapporto degli assi dell' iperbole richiesta , e della specie del triangolo BAC , per l' asse , e per l' altezza del cono.

504. Scol. 2. Volendosi poi a dirittura assegnare un' iperbole data , converrà procedere analogamente a come è stato praticato per l' ellisse nel §. 501.

## SEZIONE II.

### *Della descrizione di una curva conica nel piano, per moto organico, o per assegnazione di punti.*

---

### PROPOSIZIONE XXXVII.

PROBLEMA.

505. Descrivere organicamente una curva conica nel piano, dati i convenevoli determinanti per tale operazione.

Cioè, il parametro, e la posizione dell' asse, ed in esso il fuoco, se sia una parabola; e l' asse principale, ed. i fuochi, se sia un' ellisse, o un' iperbole.

PER LA PARABOLA.

Soluz. Sia DQ [*fig.60.*] la posizione dell' asse, ed F il fuoco, P il parametro dato; e presa sull' asse, dal punto F all' in su, la FD uguale ad $\frac{1}{4}$P, sarà D il punto di sublimità della parabola da descriversi (98.): e però tirata per D la perpendicolare TDS alla DQ, dinoterà questa la linea di sublimità della curva stessa (97.).

Ciò posto, si adatti accanto alla retta TDS, e dalla parte superiore di essa, una riga TDS; indi presa una squadra KSU, se ne applichi l' un lato SV lungo la riga TDS, e preso un filo flessibile, o catenella FRK uguale in lunghezza al lembo della riga SK, ch' è verso il punto F, un estremo di esso se ne attacchi all' estremità K della riga, l' altro ad un chiodetto fermato in F. Di poi si vada movendo la squadra KSV facendola scorrere con il lato SV lungo la

riga TDS ; e nello stesso mentre uno stiletto muovasi d'accanto all' altro suo lato KS , tenendo sempre teso il detto filo, o catenetta , finchè or siesi avvicinato il lembo SK della squadra alla retta AQ , ed or siasene allontanato in modo da essersi staccato interamente da esso il filo, o catenetta FRK. Cotesto stiletto dovrà descrivere la semiparabola richiesta , come risulta evidente dalla parte prima della prop. 19. *parab.* (105) . E rivolgendo la squadra dall' altra parte della retta DAQ, si verrà similmente a descrivere l'altra semiparabola AH. E per tal modo risulterà descritta l'intera parabola HAR.

### Per l' ellisse.

Costr. Sia AB [ *fig.61.* ] l' asse maggiore dell' ellisse da descriversi , ed F , *f* ne dinotino i fuochi.

Preso un filo , o catenetta uguale in lunghezza al dato asse , se ne fermino gli estremi a que' due fuochi , e poi si applichi al filo, o catenetta la punta di uno stiletto , che mantenendolo sempre teso su quel piano giri intorno a que' due punti , or verso A , ed or verso B , finchè il punto M coincida con ciascun di questi , segnando in esso piano la curva AMB . Indi rivolgendo il filo nell' altro verso della AB, si verrà in simil modo a descrivere l' altra identica curva A*m*B , che con la precedente rappresenterà una figura del genere delle ovali , la quale sarà l' ellisse addimandata. Come può conoscersi per la prop. 27. lib. II. (191.).

### Per l' iperbole.

Costr. Sia AB [*fig.62.*] l' asse principale dell' iperbole , che vuol descriversi, ed F, *f* ne sieno i fuochi, ne' quali stien fitti nel piano due piccoli perni , intorno al primo de' quali possa liberamente girare nel detto piano la lunga riga FK . Inoltre il filo , o catenetta *f*MK , di lunghezza quanto la ri-

ga FK minorata dell' asse AB, affidisi con un estremo nel punto *f*, e con l' altro all' estremità K della detta riga ; e poi nell'aggirarsi la riga intorno al punto F, uno stiletto muovasi rasente il lembo interiore della medesima , mantenendo sempre teso il detto filo , o catenetta . Si descriverà da quello sul piano la semiiperbole richiesta AM. E rivolgendo la riga FK dall' altra parte della F*f*, si verrà similmente a descrivere l' altra metà di tale iperbole . E volendone ancor l' opposta , non bisognerà far altro , che adattare l' estremo F della riga in *f* , e la punta *f* del filo , o catenetta in F.

La dimostrazione è chiara dalla prop. 39. *iperb.* (309).

506. Scol. La precedente descrizione per movimento organico , ch' è la più semplice tra esse , e fu adottata dal marchese de l' Hopital nelle sue *Sections coniques*, e da altri illustri geometri , comprova ciò ch' è stato detto nello scolio al §. 491. ; poichè adoperandosi fili , posson questi soffrire una maggiore, o minore distrazione , ed usando catenette , l' inflessibilità delle loro parti le rende incapaci di ben adattarsi allo stiletto : oltre che questo non essendo un punto , come richiederebbesi pel concorso in esso de' due fili , che nè tampoco sono due linee rette geometriche , la curva descritta non può geometricamente considerarsi per quella sulla cui proprietà è stato congegnato lo strumento. Aggiungasi, che con tal meccanismo solamente una parte ben limitata se ne ottiene nella parabola, e nell' iperbole.

## PROPOSIZIONE XXXVIII.

### PROBLEMA.

507. Posti gli stessi determinanti , che nel problema precedente ; descrivere per assegnazione di punti la curva conica richiesta .

Sia AB [ *fig.* 64. ] l' asse della curva conica da descriver-

si, ed A il vertice, F il fuoco corrispondente. Si assegni nella AB il punto di sublimità D di tal curva; ed applicata pel fuoco F l'ordinata FM, giungasi la DM, che dinoterà, nella curva da descriversi, la tangente per l'estremo di tale ordinata ( 96, 151, 300 ). Indi si applichino nell'angolo BDX le rette PN, *pn*, *ec.* perpendicolari alla DB, e dal centro F, con gl'intervalli uguali rispettivamente ad esse PN, *pn*, *ec.*, si vadan descrivendo cerchi; i punti R, *r*, *ec.* dove questi intersegano le corrispondenti applicate PN, *pn*, *ec.*, si apparterranno alla curva da descriversi (105, 197, 317. ): che però essa sarà quella, che si condurrà per la serie di punti prossimissimi l'un l'altro così determinati. Ed è chiaro, che il punto A debba esser limite delle applicate.

508. Scol. 1. Tutti que' determinanti da' quali può facilmente pervenirsi ad esibire i quassù richiesti, per la descrizione di una curva conica, saranno sufficienti all'oggetto. Ond'è, che con l'ajuto de' §§. 93, 155, 282, resta risoluto il problema della descrizione di una di esse curve per qualsivogliano diametri dati.

509. Scol. 2. Per l'ellisse può anche adoperarsi, in descriverla per punti, assegnati che ne sieno gli assi, il seguente elegantissimo modo, con la semplice descrizione di cerchi.

Posti gli assi AD, BE [*fig.65.*] ad angolo retto nel loro punto medio C, si descrivano da essi come diametri i cerchi DMA, BNE, e tirato nell'esteriore il raggio CNM, che segni nell'interiore il punto N, tirisi dal punto N la NP perpendicolare all'ordinata MR nel cerchio esteriore; il punto P, ed ogni altro similmente determinato si apparterrà all'ellisse richiesta.

Dim. Imperocchè essendo la NP parallela alla CR sta MR : RP :: MC : CN, ed $MR^2$, o DRA : $PR^2$ :: $MC^2$ : $CN^2$ :: $AD^2$ : $BE^2$; e però il punto P appartiene all'ellisse degli assi AD, BE.

## PROPOSIZIONE XXXIX.

PROBLEMA.

510. Descrivere un'iperbole, che abbia per assintoti i lati di un dato angolo, e passi per un punto dato dentro di esso.

Questo problema, che per ragion di metodo si è qui enunciato, si trova già risoluto nel §. 283.

## PROPOSIZIONE XL.

PROBLEMA.

511. Descrivere la sezione conica, che abbia il punto F [*fig.* 66.] per fuoco, la retta Q per parametro principale, e tocchi in M la data retta AP.

Congiungasi la retta FM, e poi si tolga in essa la ME uguale ad $\frac{1}{4}Q$; da' punti E, M si elevino le rette EN, MN rispettivamente perpendicolari alle MF, MA; e dal punto N, ove quelle si incontrano, si tiri ad F la retta NF. Di poi al punto M della MP si faccia l'angolo PMV uguale all'altro AMF. Che se la retta MV concorra colla FN in V, al di sotto del punto N; dovrà in tal caso descriversi un'ellisse co' fuochi F, V, e coll'asse maggiore uguale ad FM+MV: e si dovrebbe descrivere co' fuochi F, V, e coll' asse primario quanto la MV — MF un' iperbole, se il punto V siane al di sopra del punto N. Finalmente, se la MV risultasse parallela alla FN, dal punto M si abbassi la MK perpendicolare ad FN, e facciasi la KB terza proporzionale dopo le rette Q, MK; sarà B il vertice principale della parabola da descriversi, BN il suo asse, e Q il parametro di esso. E tali cose sono chiare dalle proprietà di queste curve.

512. Def. iii. La locale de' centri de' cerchi osculatori di una curva suol dirsi l'*evoluta* di questa; di cui la proposta curva è la *descritta dall' evoluzione*.

513. È chiaro, che i raggi di osculo di una curva debbano risultar tangenti dell'*evoluta* di essa.

514. Scol. Per formarsi un' idea di queste denominazioni adottate dall' Ugenio (*Horol. oscill. part.III. def.3*, e *4*), s'intenda un filo disteso sulla convessità di una curva, svolgersene da un suo estremo in modo, che la parte svolta rimanendo sempre tesa, rappresenti la tangente della curva nell' altro estremo ove esso continua la sua applicazione alla curva; è chiaro, che da quel primo estremo si verrà a descrivere un' altra curva, di cui ciascun elemento si confonderà con l' archetto di cerchio descritto col raggio il filo svolto; che però le grandezze di questi rappresenteranno i raggi de' cerchi osculatori della curva, la quale dicesi *descritta dall' evoluzione*; e la proposta, ove terminansi tutti questi raggi, n' è l' *evoluta* *.

515. Cor. Rilevasi pur facilmente dallo scolio precedente, che l' *evoluta*, e l' altra che si ha *dall' evoluzione* debbano risultar cave da una stessa parte; poichè le tangenti questa dovendo cadere al di fuori di essa, la sua concavità dee però rivolgersi verso i centri de' cerchi osculatori, che costituiscono l' evoluta, le cui tangenti ne' punti che rappresentano i centri suddetti, dovendo cadere tra il raggio osculatore, e l' evoluta, deve però questa rivolgerle la sua convessità; e quindi procedere con la sua curvatura nel verso stesso, che l' altra curva dall' evoluzione.

---

* Essendo invalso presso i geometri l' uso di così appellarle, bisogna ben ritenere tali denominazioni: ma in realtà quella che dicesi *evoluta* dovrebbe piuttosto dirsi *involuta*, perchè su di essa involgesi il filo; ed alla *descritta dall' evoluzione* converrebbe il nome di *evoluta*, perchè generata dallo svolgimento del filo.

SCOLIO GENERALE.

510. Per le precedenti assegnazioni delle curve coniche esigesi, che ne sien dati gli assi; e ciò non risultandò sempre dalla riduzione delle analisi de' problemi, pervenendosi il più delle volte a due diametri conjugati in dato angolo, l' è però necessario, che da questi a quelli si faccia passaggio. Or sebbene siesi già veduto il modo di ottenerlo, nelle proposizioni 17. I., 14. II. e 26. III, e che siensi anche aggiunte le note per più chiaramente specificarlo; pur tuttavia costituendo gran pregio della costruzione di un problema *solido*, per l' elegante soluzione di esso, che quel passaggio eseguasi sùlla stessa figura, o continuando lo sviluppo della riduzione, o nel principiar la costruzione, soggiugneremo quì il seguente problema, per ciò ottenere nell' ellisse, e l' iperbole; poichè nella parabola una tal cosa risulta evidentemente dal §. 94; tanto più che già avevamo ciò accennato nella nota alla prop. 14. II, e 26. III. E per compimento di dottrine vi aggiugneremo il problema inverso; ed ancora un altro caso, che può talvolta occorrere.

## PROPOSIZIONE XXXIX.

PROBLEMA.

511. Dati di grandezza, e posizione due semidiametri conjugati di un' ellisse CM, CD; determinare la posizione de' suoi assi.

SOLUZ. Dal centro C [*fig. 66.*], si elevino all' uno de' semidiametri dati CM, ed a parti opposte, le perpendicolari CG, CG' uguali fra loro, ed a CM; e congiunto il vertice D dell' altro semidiametro dato co' punti G; G' con le DG, DG', si tirino a queste da C le perpendicolari CV, CV'. Le bisecanti dell' angolo VCV', e del suo supplemento indicheranno la posizione degli assi.

Dim. Suppongasi descritta l' ellisse MDN da' dati semidiametri conjugati , e sia MGNG' il cerchio del centro C , e del raggio CM ; ed a queste due curve sieno tangenti comuni le QFE , Qfe , che debbono (386.) risultar parallele a' lati DG, DG' del parallelogrammo, che ha per diagonali i diametri loro DD', GG', conjugati al diametro comune MN. Quindi le CV , CV' , che sonosi tirate perpendicolari alle DG , DG', dovranno passare pe' contatti E , e di quelle tangenti comuni col cerchio. Ed in conseguenza la posizione di uno degli assi sarà indicata dalla QC , che biseca l' angolo ECe , ossia l' angolo VCV' ; e la bisecante del supplemento dinoterà però la posizione dell' asse conjugato. — *C. B. F.*

512. Scol. 1. Dopo ciò la grandezza degli assi può ottenersi mediante la prop. xiv. lib. II. : ma essa può anche facilmente assegnarsi sulla stessa figura ; poichè basta pel punto M, per esempio, condurre tra gli assi la HM$h$ parallela al diametro dell' ellisse DD' , e compiuto il rettangolo MBC$b$ trovare le CY, CX medie proporzionali l' una tra le CH, CB, l' altra tra le C$h$, C$b$ ; saranno le CY, CX i semiassi cercati (138).

513. Scol. 2. Se la curva cui si appartengono i dati semidiametri conjugati fosse iperbole, la posizione degli assi rimane immediatamente determinata dalle note proprietà degli assintoti, come, in fatti, vedesi praticato nella prop. xxvi lib. III.

## PROPOSIZIONE XL.

### PROBLEMA.

**514. Dati gli assi di un' ellisse, o di un' iperbole; determinare, in ciascuna di tali curve, la posizione de' diametri conjugati in dato angolo.**

Sieno YY', XX' [*fig. 67.*] gli assi, e sopra l' un di essi descrivasi il segmento di cerchio YRY', capiente l' angolo da-

to, e ne sia O il centro, che starà sull' altro asse. Ciò posto sia CZ il semiparametro del primo asse, ed in ordine a ZY, ZY', e CO si trovi la quarta proporzionale OL, che si tagli sulla OX, da O verso C; indi da L si tiri la RM parallela alla YY', che generalmente intersegherà il cerchio in due punti M, R; dall' un de' quali R si conducano ad Y, Y' le RY, RY'. Le rette CG, CD, condotte da C pe' punti medii *a*, *b* delle RY, RY', dinoteranno la posizione de' semidiametri, che comprendono l' angolo GCD uguale al dato YRY'.

Dim. Imperocchè è in prima evidente, che questi angoli sieno tra loro uguali, a cagione del parallelogrammo R*a*C*b*. E se compiasi il cerchio, e vi si tiri la corda RVT parallela alla CX, e la OS parallela alla YY', essendo

$$OL : OC :: ZY' : ZY$$

avrassi

$$OL + OC : OL - OC :: ZY' + ZY : ZY' - ZY$$

ossia $$VT : VR :: CY : CZ$$

Ma sta pure

$$VT : VR :: VT \times VR : VR^2 :: VY \times VY' : VR^2$$

ed è di più $$CY : CZ :: CY^2 : CX^2 \quad (146,260)$$

Quindi sarà $$VY \times VY' : VR^2 :: CY^2 : CX^2$$

D' onde risulta, che il punto R appartenga alla curva conica descritta co' semiassi CY, CX; che però, le C*a*, C*b*, le quali passano pe' punti medii delle RY, RY' dinoteranno (141, 261.) la posizione di due semidiametri conjugati della curva stessa, i quali già comprendono un angolo uguale al dato.

515. Scol. L' altro punto d' intersezione M, che soddisfa alle medesime condizioni, risolve del pari il problema, e perciò somministra due altri diametri conjugati, diversi da' primi, che comprendono pure un angolo uguale al dato. Ond' è, che tanto nell' ellisse, che nell' iperbole vi ha due coppie di diametri conjugati, che comprendono un angolo stesso: ed è evidente, che i medesimi sieno sempre simmetricamente posti rispetto agli assi.

## PROPOSIZIONE XLI.

PROBLEMA

516. Dato un diametro AB di un' ellisse, o iperbole [*fig*.68.], e dati due punti E,F di essa; determinare la grandezza, e posizione del suo conjugato.

Soluz. Da' due punti dati E, F, e dagli estremi A, B del diametro dato, si formi il quadrilatero AEFB, i cui lati opposti s' incontrino in H, G, e le diagonali AF, EB in P; si unisca la GP, e pel punto C medio di AB si conduca la parallela alla GP, che incontri in M,N le due rette, che dall'un de' punti dati vanno agli estremi del diametro AB. Trovata la CD, media proporzionale tra le CM, CN, sarà essa il semidiametro conjugato ad AC.

Dim. Imperocchè risulta da'§§.90,173,293, che la GP sia la polare del punto H; e però il conjugato di AC dovrà esser parallelo a questa retta. Ciò premesso, suppongasi al punto F applicata la tangente, che incontri in R, S le tangenti pe' punti A, B; sarà $BS \times AR$ quanto il quadrato del semidiametro conjugato a CA. Or si unisca CS; questa retta bisecherà la FB, e sarà perciò parallela alla AF. Laonde i triangoli ACN, CBS saranno eguali, e simili; e sarà quindi $BS = CN$. Nella stessa guisa si conchiuderà $AR = CM$; e però si avrà $BS \times AR = CD^2$. Ed in conseguenza sarà CD il conjugato di CA.

## PROPOSIZIONE XLII.

PROBLEMA.

517. Descrivere un' iperbole, che abbia per assintoti i lati di un dato angolo, e passi per un punto dato dentro di esso.

Questo problema, che per ragion di metodo si è qui enunciato, si trova già risoluto nel §. 283.

518. Continueremo l' argomento della descrizione delle curve coniche, con esibir qui quella delle loro evolute; ripigliando così, e compiendo le ricerche sul raggio d' osculo già trattate nel capitolo precedente, e come ivi avevamo promesso di fare.

519. Def. III. La locale de' centri de' cerchi osculatori di una curva suol dirsi l' *evoluta* di questa; che n' è la *descritta dall' evoluzione*.

520. Scol. L' accuratissimo Ugenio adottò tal denominazione partendo dalla seguente genesi relativa di esse curve.

Sulla convessità della curva BCDEF ... [*fig.69.*] s' intenda adattato il filo ABCDEF .... il quale se ne vada poi svolgendo dall' estremo A, tenendolo sempre teso, e tangente la curva BCDEF ... ne' punti B, C, D, E, F ... dove sia pervenuto lo svolgimento; si verrà da quell' estremo A del filo a descrivere una curva AHIK ..., ch' è la *descritta* dall' evoluzione, mentre la curva BCDEF... n' è l' *evoluta**.

521. Cor. 1. È chiaro, che la curva AHIK ... *descritta dall' evoluzione* risulterà da tanti archetti di cerchi de' raggi BA, CH, DI, EK ..., che avranno però in tali punti la medesima curvatura della curva AHIK ..., e che quindi ne saranno i cerchi osculatori in que' punti. E *viceversa*, che l' evoluta BCDEF risulti dagl' intervalli successivi tra' raggi di osculo AB, HC, ID, KE ...; vale a dire dalle retticciuole BC, CD, DE ..., che sono il prolungamento dell' un raggio di osculo, finchè incontri il prossimissimo ad esso. E da ciò risulta evidentemente, che:

I. *Le tangenti dell' evoluta prodotte fino alla curva descritta dall' evoluzione, sono i raggi di osculo rispettivi di questa; e però perpendicolari ad essa ne' punti ove l' incontrano.*

* *Hor. oscill. part. III. def. 3, e 4.*

II. *Gli estremi de' raggi di osculo della curva descritta dall' evoluzione debbono allogarsi nell' evoluta di essa.*

Le quali due illazioni furono dall' Ugenio, e da Giovanni Bernoulli dimostrate.

522. Cor. 2. È facile ancora comprendere, che l' *evoluta*, e l' altra che si ha *dall' evoluzione* debbano risultar cave da una stessa parte; poichè le tangenti questa dovendo cadere al di fuori di essa, la sua concavità dee però rivolgersi verso i centri de' cerchi, che costituiscono l' evoluta, le cui tangenti ne' punti che rappresentano i centri suddetti, dovendo cadere tra il raggio osculatore, e l' evoluta, deve però questa rivolgerle la sua convessità; e quindi procedere con la sua curvatura nel verso stesso, che l' altra curva dall' evoluzione.

523. Cor. 3. Sia EK una tangente dell' evoluta in un punto qualunque E, prodotta in K fino alla curva nata dall'evoluzione; l' intera EK pareggiando la lunghezza del filo, che avvolgeva la curva dal punto E al punto B, insieme con la lunghezza AB; tagliando K$k$ uguale ad AB, rimarrà la retta E$k$ uguale all' arco EB dell' evoluta. Nel modo stesso, se sopra un' altra tangente DI, appartenente ad un punto D, si tagli I$i$ uguale ad AB, si vedrà la retta D$i$ uguale all' arco DB; e però l' arco DE differenza degli archi EB, DB sarà quanto la differenza delle rette $k$E, $i$D ovvero quanto quella delle stesse KE, ID. Dunque:

*Un arco qualunque di un evoluta, è sempre uguale alla differenza delle tangenti pe' suoi estremi, prodotte fino alla curva che risulta dall' evoluzione.*

Ed è poi chiaro che se sia data una curva e la sua evoluta, potrà sempre assegnarsi una retta uguale ad un arco qualunque di questa.

## PROPOSIZIONE XLIII.

### PROBLEMA.

524. Data una curva conica; descrivere per assegnazione di punti la sua evoluta.

Soluz. Sia A [ *fig.69.* ] il vertice, ed AP l'asse della sezione conica AHR, sul quale prendasi la AB quanto il semiparametro corrispondente; sarà il punto B il principio dell' evoluta richiesta (458, a 480). Indi per un punto qualunque H della curva conica si assegni, con la costruzione esposta nel §. 467, o nell' altro 480 il centro C del cerchio osculatore di essa in quel punto; si apparterrà un tal punto C all' evoluta richiesta. E similmente per gli altri punti di questa.

525. Scol. 1. Se la curva sia parabola, rappresenterà BF [*fig.70.*] l'evoluta del ramo parabolico AR, ed al contrario la B*f*, identica alla BF sarà l' evoluta dell' altro ramo parabolico A*r*; e questi due rami di evolute, che si congiungono nel punto B, ove l' ascissa AB è quanto il semiparametro dell'asse, e l' ordinata è *zero*, procederanno all' infinito, del pari che sono identici, e procedenti all'infinito i due rami parabolici AR, A*r*, che sono le curve *descritte dall' evoluzione*.

526. Che se AR [*fig. 71.*] rappresenti un quadrante ellittico, è chiaro, che l' evoluta BF debba avere l' altro estremo suo in quel punto F dell' asse minore, che rappresenta il centro del cerchio osculatore in R, e però essere la RF quanto il semiparametro dell'asse minore. E lo stesso punto F si apparterrà ancora all' altra evoluta del quadrante ellittico laterale *a*R. Ed operando, e ragionando allo stesso modo, pe' due quadranti dell' altra semiellisse A*ra*, si otterrebbero le evolute per essi: e tutte quattro queste comprenderanno un quadrilatero co' quattro lati identici. Sicchè le quat-

tro evolute suddette sono terminate, del pari che i quadranti ellittici cui appartengono, e rappresentano una figura chiusa del pari che l' ellisse; se non che in questa le quattro parti della curva riguardano il centro con la loro concavità, mentre in quella la riguardano per la convessità.

527. E sarà facile rilevare, con lo stesso ragionamento, che nelle iperboli opposte, i quattro rami di evoluta, per ciascun ramo iperbolico, a destra, o a sinistra dell'asse, sieno pure identici, ma indefiniti, come il sono i rami iperbolici; e finalmente ch' essi riguardino il centro con la loro concavità, mentre i rami iperbolici lo riguardavano per la convessità.

528. Inoltre riferendo, nell' ellisse, e nell' iperbole, le ascisse dell' evoluta al centro di tali curve, ed indicando per $a$ il semiasse maggiore, per $c$ il minore, e per $p$ il semiparametro, l' eccentricità per $e$, sarà per la prima di tali curve la massima ascissa CB [ *fig.71.* ] $= a - p$, ove sostituendo a $p$ l'equivalente $\frac{c^2}{a}$, sarà CB $= \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{e^2}{a}$; e però *la massima ascissa sarà terza proporzionale in ordine al semiasse maggiore, ed all' eccentricità*. E la massima ordinata FC essendo uguale a FR — CR, cioè al raggio osculatore in R, toltone il semiasse minore, ossia eguale ad $\frac{a^2}{c} - c$, e quindi ad $\frac{e^2}{c}$. Ne segue, che *la massima semiordinata sarà terza proporzionale in ordine al semiasse minore, ed all' eccentricità*. Le quali due verità trovavansi dall' Ugenio assunte nella prop. 10. della part. III. del suo *Horol. oscillat.*, sebbene sienvi in altro modo espresse.

529. Similmente nell' iperbole la massima ascissa dal centro, corrispondente all' ordinata *zero* nell' evoluta, vien rappresentata da $a + p = \frac{a^2 + c^2}{a} = \frac{e^2}{a}$. E però essa risulta, come nell' ellisse si è poc' anzi veduto, *terza proporzionale in ordine al semiasse, ed all' eccentricità*.

## *SEZIONE III.*

## *Dell' esibizione di una curva conica per condizioni date.*

530. Come è stato già detto nel §. 488, i problemi per la descrizione delle curve coniche possono anche avere tali determinanti, che da questi possa pervenirsi a quelli, per l' immediata loro descrizione, considerati nelle proposizioni 37, e 38.

531. I principii su cui abbiamo fondate le presenti ricerche sono desunti da quel teorema conosciuto col nome di *esagono mistico* del Pascal, da cui abbiamo derivato, con grandissima facilità le soluzioni de' problemi che tratteremo, ed una mirabile uniformità di esse. E potrà con lo stesso vantaggio adoperarsi in quelli altri problemi di siffatta specie, che tralasceremo, per non essere infiniti, sembrandoci di aver già ecceduti di molto, in questo libro IV., i limiti di un' opera istituzionale. Per siffatta ragione abbiamo dovuto premettere alle presenti ricerche un tal teorema, non sol poco noto; ma anche, da coloro che lo avevano indicato, o affatto lasciato senza dimostrazione, o con darla in modo poco confacente alla Geometria cui si appartiene.

### PROPOSIZIONE XLIV.

#### TEOREMA I. FONDAMENTALE.

532. I tre punti di concorso de'lati opposti di un esagono iscritto in una curva conica sono in linea retta.

Dim. Sieno A, B, C, D, E, F [ *fig*. 72. ] sei punti comun-

que presi in una sezione conica, e congiunti a due a due, con quell' ordine che piaccia, sicchè risulti una figura esagona ABCDEF; e sieno P,Q,R i tre punti in cui s' incontrano i lati di questa rispettivamente opposti AB, DE; BC, EF; CD, AF. Inoltre sieno AD, BE, CF le tre diagonali dell' esagono, ed X, Y, Z i loro poli rispettivi. E poichè le diagonali AD, BE formano co' due lati opposti AB, DE il quadrilatero iscritto ABED; perciò i tre punti X, P, Y staranno in linea retta (*n.xi. nota al* §.*85*).E così vedrassi, che stieno per dritto i tre punti Y,Q,Z, al pari degli altri X,Z,R. Ciò posto, per le estremità di un lato qualunque AB dell' esagono, si tirino le tangenti AT,BT, che passeranno l'una per X, l'altra per Y. Ed essendo T,Z poli rispettivamente di AB, CF, lati opposti del quadrilatero iscritto ABCF, se H sia il punto di concorso degli altri due lati BC, AF; i tre punti H, T, Z staranno in linea retta. E però conducendo per Z, e fino alle AF, BC, lati dell' esagono contigui ad AB, le ZK, ZG, parallele alle tangenti TA, TB; i triangoli BTA, GZK risulteranno simili, e similmente posti tra loro, e quindi ad LXA (tirando XL parallela alla stessa TB, e fino al lato AB).

Intanto essendo simili i due triangoli QBY, QZG sta

QY : QZ :: BY : ZG

Ma tirata la ZI parallela alla PY, e fino ad incontrare la PQ nel punto I, sta pure

QY : QZ :: PY : ZI

Starà dunque BY : ZG :: PY : ZI

d' onde risulta, che, congiunta la GI, sia il triangolo GZI simile a BYP, e quindi ad LXP. Ma sono i lati XL, XP paralleli a ZG, ZI; dunque le loro basi LP, GI saranno parallele; ed in conseguenza il punto I cadrà sulla GK. Dopo ciò si vedrà esser anche simili i triangoli PXA, IZK, ed essendo per dritto i tre punti X,Z,R, staranno anche per dritto i tre punti P, I, R. Ma il punto I sta sulla PQ. Adunque i tre punti P, Q, R staranno in linea retta.—*C.B.D.*

533. Cor. 1. Suppongansi fissi sulla curva soli cinque punti A, B, C, D, E ; de' tre punti P, Q , R rimarrà fisso il solo punto P , e però facendo variare sulla curva stessa il sito del sesto punto F , si avranno infiniti esagoni iscritti in essa, pe' quali il punto P si troverà sempre per dritto cogli altri due punti Q,R, concorsi de' rimanenti lati opposti BC, EF; CD , AF . Se il sesto punto F si prendesse fuori della curva , come in F', i tre punti non più potrebbero star per dritto ; poichè l'incontro di CD, e di AF', non può avvenire sulla PQ. Dunque affinchè sei punti possano trovarsi sopra di una sezione conica si richiede , che i tre punti di concorso de lati opposti dell' esagono , che ne risulta congiugnendoli , si trovino in linea retta : ed unica sarà la curva , che passerà allora per essi; perchè una volta descritta, nessun altro punto potrebbe prendersi al di fuori , sicchè co' rimanenti cinque possa dare un esagono con la condizione prescritta . E poichè , dati cinque punti , può sempre trovarsene un altro , sicchè i lati opposti dell' esagono, che ne risulta , stieno per dritto ; così per cinque punti , tre de' quali comunque presi non istieno per dritto, potrà sempre farsi passare una seziono conica ; la quale sarà anche unica , perchè ovunque stia il sesto punto , non può uscire dal suo perimetro .

534. Cor. 2. Al contrario , se i punti pe' quali voglia farsi passare una sezione conica fossero solamento quattro ; siccome in modi infiniti può prendersi un quinto punto , e descriversi una curva tra questi cinque punti , così è chiaro , che non una , ma *infinite sezioni coniche possono farsi passare per quattro punti.* Il che conferma ciò che fu dedotto nel cor. al §.358.

535. Cor. 3. Se due de' lati opposti dell' esagono , come AF, CD [*fig. 73.*] , sieno tra loro paralleli, la PQ risulterà parallela a' lati medesimi.

536. Cor. 4. Se due vertici contigni dell' esagono, come E, F [ *fig. 74.*] , si riuniscano in un sol punto , il lato EF

si cambicrà nella tangente QE ; ed i tre punti P , Q , R non cesseranno di star per dritto. E perchè in questo caso l' esagono riducesi al pentagono ABCDE, per qualunque de' due vertici contigui della prima figura ; perciò :

*Se un pentagono sia iscritto in una sezione conica ; il punto d' incontro di un lato qualunque di esso con la tangente nel vertice dell' angolo , che gli è opposto , starà sulla retta, che unisce i due punti di concorso de' lati intorno a quest' angolo co' rimanenti due lati, che sono ad essi rispettivamente opposti.*

537. Cor. 5. Risulta ancora dal precedente paragrafo

I. *Che una sola sezione conica può descriversi, che passi per tre punti dati , e tocchi una data retta in un punto dato.*

II. *E che infinite sezioni caniche possono descriversi, che passino per due punti dati , e tocchino una data retta in un punto dato.*

## PROPOSIZIONE XLV.

### TEOREMA II. FONDAMENTALE.

538. Le tre diagonali di un esagono circoscritto ad una sezione conica si tagliano in un sol punto.

Dim. Sia STUVXY [ *fig.* 75. ] un esagono circoscritto ad una sezione conica ; A,B,C,D,E,F sieno i sei punti di contatto de' suoi lati con la curva , ed SV, TX, UY le sue diagonali . Formando da' punti di contatto l' esagono iscritto ABCDEF ; i suoi lati opposti concorreranno in tre punti P, Q, R situati per dritto ( *teor. prec.* ) . E poichè la diagonale SV passa pe' poli delle AB, DE, che si riuniscono in P ; sarà SV la polare del punto P (*n. r. nota al* §.83.) . E similmente le altre due diagonali TX , UY saranno le polari degli altri due punti Q, R. Laonde essendo i tre punti P, Q, R in linea retta , le diagonali dell' esagono circoscritto SV,TX,

UY polari rispettive de' punti istessi s' intersegheranno in un medesimo punto (*n.11. nota cit.*).

539. Cor. 1. Se due de' lati contigui dell' esagono costituiscono un angolo si ottuso, da esser quasi una linea sola, come le UT, UV [*fig. 76.*]; in tal supposizione i due contatti C, D si uniranno in un sol punto col vertice U, e l' esagono si ridurrà al pentagono circoscritto STVXY; e la UY, che congiunge il vertice Y col contatto U si taglierà sempre nel medesimo punto colle SV, TX. E questo ragionamento esteso agli altri contatti, ne risulterà, che:

*Se un pentagono è circoscritto ad una sezione conica; la congiungente del vertice di un angolo qualunque col contatto del lato, che gli è opposto, si taglierà sempre nel punto stesso colle rette, che sottendono i due angoli, cui é comune il lato medesimo.*

540. Cor. 2. Qui pure può dedursi, come nella prop. prec.

I. *Che un esagono, per poter essere circoscrittibile ad una sezione conica dev' esser tale, che le sue tre diagonali si taglino in un punto.*

II. *Che una sola sezione conica possa descriversi tangente cinque rette, tre delle quali comunque prese non concorrano in un medesimo punto.*

III. *E che infinite sezioni coniche possano descriversi tangenti quattro rette.*

## PROPOSIZIONE XLVI.

### PROBLEMA.

541. Descrivere la sezione conica, che passi per cinque punti dati A, B, C, D, E [*fig. 77.*].

Cominciando da qualunque de' punti dati, si congiungano successivamente le AB, BC, CD, DE, e le due rette estreme AB, DE producansi fino a riunirsi in P. Indi preso sulla

BC un qualsivoglia punto Q, si unisca la PQ, che incontri il terzo lato CD in R, d'onde a' punti estremi A, E si tirino le RA, QE; la loro intersezione F sarà un sesto punto della sezione conica cercata. E così prendendo altri punti diversi da Q, si avranno tanti punti quanti se ne vogliono della stessa sezione conica. Quindi essa potrebbe, per tal modo, risultar descritta per punti.

Ma volendone assegnare il centro, e gli altri determinanti per la sua descrizione, a fin di ottenerla ne' modi prescritti nella *sezione II.*, tirisi la AF parallela al lato BC, che incontri la CD in R; indi congiunta PR dal punto Q ov' essa incontra BC, si tiri ad E la QEF, le BC, AF saranno due corde parallele della sezione conica; ond' è che il suo centro dovrà trovarsi sulla MN, che passa pe' loro punti medii. Dopo ciò potrà tirarsi la AF' parallela al lato seguente CD; ed in tal caso conducendo per P la parallela alla stessa CD, che incontri in Q' il lato BC, congiunta la Q'E, che incontri quella parallela in F', la TU, che unisce i punti medii delle corde CD, AF', passerà del pari pel centro. Ond' è che questo punto risulterà dall'intersezione O delle MN, TU. Ritrovato il centro O si verranno ad avere diversi diametri, e punti delle curva; quindi per la prop. XLI. si avrà la posizione, e grandezza di due diametri conjugati; ed in conseguenza dalla prop. XL. si ricaverà la grandezza, e posizione degli assi; e la curva potrà allora venir descritta.

542. Scol. 1. Se le rette MN, TU, che passano pe' punti medii delle corde parallele, e che han servito a determinare il centro O, risultassero parallele, la sezione conica sarà parabola; e dalla posizione de' punti, e più di tutto da quella del centro rispetto ad essi, si vedrà tosto se la curva debba essere un' ellisse ovvero un' iperbole.

543. Scol. 2. Anche prima di determinarsi la posizione del centro, può trovarsi, ove occorra, la tangente in ciascuno de' punti dati. Imperocchè compiuto il pentagono ABCDE

[ *fig.74.* ] , se , *p. e.* , sia E il punto , in cui si voglia la tangente , si produrranno (536.) le CD , AE fino a riunirsi in R , e le AB , FD in P ; indi congiunta PR , che incontri la BC in Q, si tirerà la QE ; sarà QE la tangente della curva, esibita anche prima di assegnar questa .

## PROPOSIZIONE XLVII.

### PROBLEMA.

**544. Descrivere la sezione conica , che tocchi cinque rette date.**

Le date rette si producano fino a che riunendosi ne' punti S,T,V,X,Y [*fig.78.*] formino il pentagono STVXY. Sottendendo due angoli contigui di questo , come quelli in T, V, con le rette SV, XT, e poi pel punto K , in cui queste s' incontrano,tirando al vertice Y dell'angolo opposto a TV, lato comune a' due primi angoli, la YKC; sarà (539.) C il punto di contatto della sezione conica cercata con questo lato TV.

E determinando nel modo stesso gli altri contatti B,A,F,E cogli altri lati, si avranno cinque punti A, B, C, E, F della curva, e quindi il problema troverassi ridotto al precedente.

Se non che, nel presente caso, il centro può aversi immediatamente ; poichè tirando due qualunque delle corde di contatto AB , BC , il centro O, risulterà dalle intersezioni delle SO , TO condotte pe' vertici S , T degli angoli sottesi da quelle corde , a'punti medii M, N di queste.

### S c o l i o I.

545. È evidente, che le costruzioni le quali risultano pe' due precedenti problemi , possono variarsi , e modificarsi a piacere , ed anche rendersi più semplici a seconda delle disposizioni , e delle relazioni , che ne' varii casi possono esistere tra' dati.

### SCOLIO II.

546. Combinando i dati di essi due problemi, se ne potrebbero congegnare i seguenti altri

*Descrivere una sezione conica :*

III. *Che passi per quattro punti dati, e tocchi una retta di sito.*

IV. *Che passi per tre punti dati, e tocchi due rette di sito.*

V. *Che passi per due punti dati, e tocchi tre rette di sito.*

VI. *Che passi per un punto dato, e tocchi quattro rette di sito.*

E questi problemi trovansi risoluti dal Newton nella sezione V. lib.I. de *Princip. Mathem.* Ed in essi potransi convenevolmente esercitare i giovani, in dedurne le costruzioni più facilmente, e con uniformità da' principii stabiliti ne' due teoremi fondamentali.

Inoltre considerando, che un de' punti dati avvicinandosi continuamente al prossimo ad esso, fino a confondervisi, la corda che gli congiungeva diviene tangente in quel punto fisso, se ne rileveranno ancora i seguenti altri problemi

*Descrivere una sezione conica :*

VII. *Che passi per tre punti dati, e tocchi una retta di sito in un dato punto.*

VIII. *Che passi per due punti dati, e tocchi due rette di sito, l' una delle quali in un dato punto.*

IX. *Che passi per un punto dato, e tocchi due rette di sito in punti dati.*

E potrebbero anche aggiugnersene altri, con altre combinazioni, come :

*Descrivere una sezione conica :*

X. *Che tocchi tre rette di sito, due delle quali in punti dati.*

XI. *Che tocchi tre rette di sito, ed abbia un dato punto per centro.*

XII. *Che passi per tre punti, ed abbia un dato punto per centro.*

XIII. *Che sia simile, e similmente posta ad una data sezione conica, e passando per un punto dato tocchi una data retta di sito in un punto anche dato.*

Ed altri di tal fatta. Ma noi tralasciando le soluzioni di tutti questi problemi ad esercizio de' giovani, dopo i principii stabiliti, recheremo solamente quella de' seguenti, che servono di riduzione al problema inverso delle forze centrali nella vera ipotesi della gravità decrescente come il quadrato della distanza dal centro delle forze. E per questa medesima ragione un' altro ancora ne aggiugneremo, che il Newton assunse ne' suoi *Princip. math.*, per la soluzione del suddetto problema di Meccanica celeste, senza aver nè men creduto doverlo premetter come lemma alle prop. 11, 12, 13, della sez.3. lib.I., come in tanti altri rincontri era stato solito fare; nè tampoco pensarono ad illustrarlo i comentatori perpetui di questo sublime lavoro, i quali per dir vero lasciarono senza comento precisamente que' luoghi di esso, che più bisogno ne avrebbero avuto. E questi due problemi, qui geometricamente risoluti, verranno ancora saggiati con l' Analisi algebrica nelle *Sezioni coniche analitiche*, per servir sempre di confronto tra l' un metodo, e l'altro.

## PROPOSIZIONE XLVIII.

### PROBLEMA.

547. Descrivere la sezione conica, con un dato parametro principale Q, ed un dato fuoco F, e che tocchi in un punto dato M la retta di sito AP.

Congiungasi la retta FM [*fig.79.*], e poi si prenda in essa la ME uguale ad $\frac{1}{2}$Q: da'punti E, M si elevino le rette EN, MN rispettivamente perpendicolari alle MF, MA; e dal punto N, ove quelle si uniscono, si tiri ad F la retta NF. Di poi

al punto M della MP si faccia l'angolo PMV uguale all' altro AMF. Che se la retta MV concorra colla FN in V, al di sotto del punto N; dovrà in tal caso descriversi un' ellisse co' fuochi F, V, coll' asse maggiore uguale ad FM+MV: e si dovrebbe descrivere co' fuochi F, V, e coll' asse primario quanto la MV — MF un' iperbole, se il punto V siane al di sopra del punto N. Finalmente, se la MV risultasse parallela alla FN, la curva da descriversi sarà parabola, ed abbassando dal punto M la MK perpendicolare alla FN, e facendo KB terza proporzionale dopo le rette Q, MK, ne sarà B il vertice principale, BN l' asse, e Q il parametro di esso. E tali cose sono chiare dalle proprietà di queste curve.

## PROPOSIZIONE XLIX.

### PROBLEMA.

548. Descrivere una sezione conica, la quale abbia un dato fuoco F, e tocchi in un dato punto M la retta di sito AP, avendo ivi una data curvatura.

Sol. Si congiunga il dato fuoco F [*fig.80.*] col punto dato M nella tangente AP, e da tal punto elevata alla MP la perpendicolare ME quanto il raggio dato di curvatura pel punto stesso, si abbassi da E sulla MF la perpendicolare EC, e dal punto C si tiri alla ME l' altra perpendicolare CR; il punto R dovrà allogarsi nell' asse della richiesta curva (477.); e tirata la RV perpendicolare alla MF, ne sarà 2MV il parametro principale (107,195,316.). Laonde il problema si sarà ridotto al precedente.

## SCOLIO.

549. Conchiuderemo la presente sezione III. con ripetere in certo modo ciò, che altre volte n' è stato pure accennato,

cioè, che i problemi per la descrizione delle curve coniche a due classi possonsi ridurre. Gli uni della loro meccanica descrizione nel piano, che, come si è detto, può ottenersi o per moto continuo, o per assegnazione di punti. E questi debbono considerarsi come il principio di risoluzione di qualunque quistione geometrica, o meccanica, ove entrino a parte della sua composizione le curve coniche. Gli altri sono puri problemi speculativi, ne' quali propongonsi con dati determinanti a descrivere geometricamente tali curve; e questi, per le ragioni precedentemente addotte, di quelli hanno bisogno, se vogliansi ridurre in pratica, ed in uso.

Che se tali determinanti sieno puramente posizionali, conviene avvertire, che necessariamente essi debbano equivalere a cinque punti dati di sito, cioè che la curva da descriversi debba in ultima analisi esser ridotta a passare per cinque punti dati. Imperocchè l'è già noto, che quattro punti solamente non bastano a determinare una curva conica; ma infinite diverse possono pe' medesimi farsi passare (358, 533, e 534.). Di tal che nel problema per esempio del n. VII. (§.546.) la condizione, che la retta sia toccata in un dato punto di essa, equivale a due determinanti (537.); e così degli altri.

550. Porremo termine al presente capitolo, ed al lib. IV. con riportare un importante teorema dovuto al Newton, che non avrebbe meritato di essere trascurato ne' trattati delle curve coniche, per esser fecondo di verità nuove, e della soluzione di difficili problemi; ed al quale premetteremo il seguente.

## LEMMA.

551. *Se ne' lati opposti $BF$, $CE$ [fig. 81.] di un quadrilatero $BFEC$ si prendano due parti qualunque $BP$, $CQ$ proporzionali a' lati stessi; la congiungente de' punti $P$, $Q$ sarà bisecata nel punto ov' è incontrata dalla retta, che unisce i punti medii $O$, $Z$ degli altri due lati opposti $BC$, $FE$.*

Dim. Sia V il punto medio di PQ, e prodotti i lati BF, CE fino a riunirsi in A, da' punti O, V, Z si conducano a' lati stessi le parallele, sicchè compiasi la figura come si vede. Sarà chiaro, per questa costruzione, che sia AP doppia di AM, ed AB di AR; ond'è che sarà BP doppia di MR, ossia di VL. Al modo stesso si vedrà CQ doppia di VH, e starà perciò BP : CQ, ovvero BF : CE :: VL : VH. Identicamente si rileverà ancora BF : CE :: $Zl$ : $Zh$. Laonde si avrà VL : VH :: $Zl$ : $Zh$; e da questa proporzione, per essere le VL, VH rispettamente parallele alle $Zl$, $Zh$, risulta che i tre punti O, V, Z sieno in linea retta; vale a dire, che la retta OZ passa, come si è enunciato nel teorema, pel punto V medio di PQ.

## PROPOSIZIONE L.

### TEOREMA.

552. Il luogo geometrico de' centri delle infinite sezioni coniche, iscrittibili in un dato quadrilatero completo *, è una retta data di sito, che passa pe' punti medii delle sue tre diagonali **.

Dim. Sia O [*fig.* 82.] il centro di una sezione conica qualunque iscritta nel quadrilatero completo APDQFE, e sia RR′ la retta, che passa pe' punti medii Z, V, U delle sue diagonali FE, PQ, AD. Sia inoltre GS la congiungente i contatti di due lati qualunque del quadrilatero colla curva, e pel suo centro O si tiri a GS la parallela BC, che si arresti tra' lati dell'angolo GAS; sarà *** BP × CE = CQ × BF, e sta-

* Più esattamente si direbbe *sezioni coniche tangenti quattro rette*; ma per brevità usiamo l'altro modo, anche perchè generalmente ricevuto.

** *Ved.* il teor. a pag. IX. *Note*.

*** *Ved.* il teor. a pag. XIX. *Note*.

Fig. 8.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 12. 14.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 19.

Fig. 21.

Fig. 24.

Fig. 27.

Fig. 30.
Fig. 35.
Fig. 32.
Fig. 38.
Fig. 40.

Fig. 42.
Fig. 46.
Fig. 52.
Fig. 54.
N. 1.
N. 2.
Fig. 56.
N. 2

Fig. 58.
A
F'
F'
F
H
B
D
C
K
E
f
S
U
Fig. 61.
A
F
M
f
B
Fig. 63.
D
A
F
M
p
P
B
Fig. 66.
D
X
L
M
R
C
C
Y
V
Z
Y
O
S
T
Fig. 62.
K
I
H
A
B
C
D
E
F

Fig. 71.
Fig. 76.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 78.
Fig. 81.

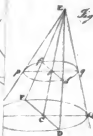
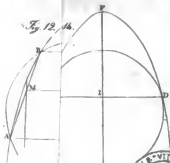
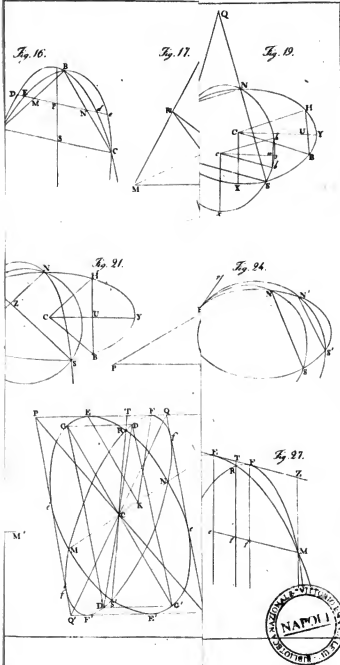
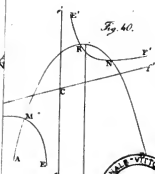
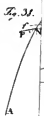
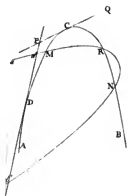
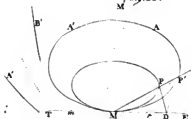
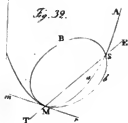
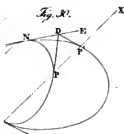
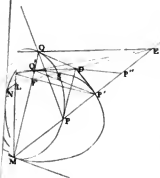
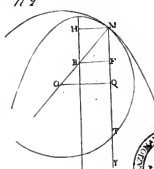
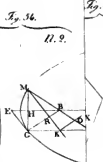
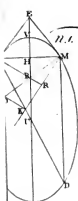
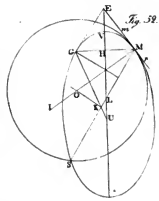
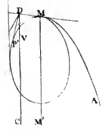
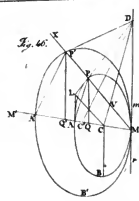
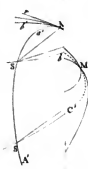
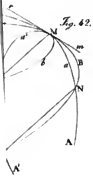
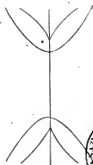
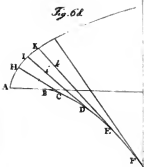
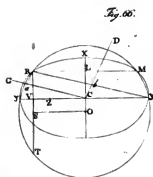
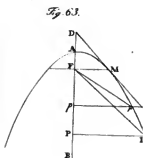
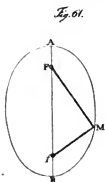
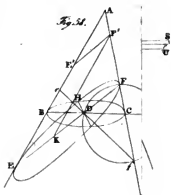
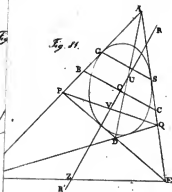
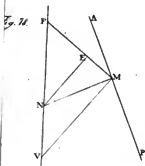
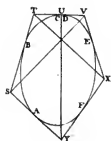
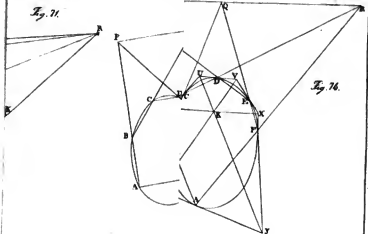
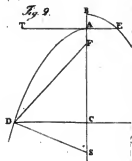
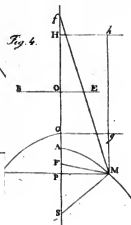
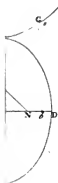
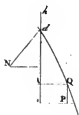
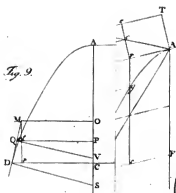
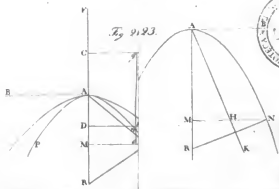
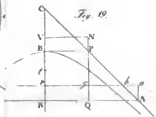
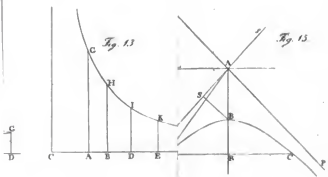
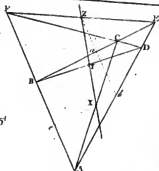
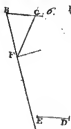
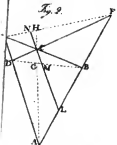
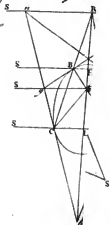
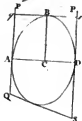
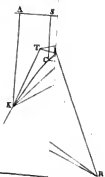
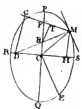
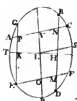
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 9.
Fig. 11.

Fig. 13

Fig. 15

Fig. 17

Fig. 19

Fig. 21, 23

Note.
Fig. 9.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fig. 16.

rà BF : CE :: BP : CQ ; vale a dire, che le parti BP, CQ de' lati opposti BF, CE del quadrilatero BCEF sono proporzionali a' lati stessi. Quindi, pel lemma precedente, la retta, che passa pe' punti medii O, Z de' rimanenti due lati opposti BC, FE, passerà ancora pel punto medio V di PQ; e però i tre punti Z, V, O sono per dritto; e ne risulta, che il centro O della sezione conica sia per dritto co' tre punti Z, V, U, cioè a dire esso si troverà sulla retta RR', che passa pe' punti medii delle tre diagonali del quadrilatero—*C.B.D.*

553. Scol. Avremo altrove ripetute occasioni da mostrar l' importanza di questo bellissimo teorema; ma per ora faremo osservare, che per mezzo di esso il centro della sezione conica tangente a cinque rette rimane immediatamente determinato, ed in modo diverso da quello prescritto nella prop. XLVII. del presente libro; bastando per ciò considerare due diverse combinazioni a quattro a quattro delle cinque rette date; essendo chiaro, che il centro debba risultare dalla intersezione delle due rette, che passano pe' punti medii delle tre diagonali de' due corrispondenti quadrilateri.

*Fine del libro quarto.*

DELLE

# SEZIONI CONICHE

## LIBRO QUINTO

LA MISURA DELLE SEZIONI CONICHE, E DE' SOLIDI CHE DA ESSE SI GENERANO.

## CAPITOLO I.

PRENOZIONI A QUESTO ARGOMENTO.

554. DEF. I. Se da un punto di una curva conica si tiri la semiordinata all'asse, intorno al quale si aggiri con perfetta rivoluzione il trilineo terminato da tal semiordinata, dalla sua ascissa computatavi dal vertice, e dall' arco, ch' è tra queste rette, si chiamerà *Conoide* * il solido generato in tal modo. Ed esso si dirà *parabolico*, *ellittico*, o *iperbolico*, secondochè la curva generatrice sia una parabola, un' ellisse, o un' iperbole.

555. DEF. II. Una semiellisse terminata dall'asse maggiore, se aggirisi con perfetta rivoluzione intorno al detto asse; il solido, che si genera, si dirà *sferoide*. E se una semiellisse terminata dall' asse minore si aggiri con perfetta rivoluzione intorno a quest' asse, dovrà dirsi *sferoide schiacciata*, *de-*

* Cioè *a forma di cono*, sì per la figura ch' esso presenta con un vertice, e terminato da un cerchio base, che per la genesi analoga a quella del cono, data da Euclide (*def. 10. lib. XI.*). E così pure più appresso *sferoide*, cioè *a forma di sfera*; *cilindroide*, ossia *a forma di cilindro*.

*pressa*, ed anche *ellissoide* * il solido, che vien generato in tal modo.

556. Def. III. Un' iperbole, che si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo asse conjugato, produce un solido, che dicesi *Cilindroide*.

557. Scol. L' asse di rivoluzione nella prima delle indicate sferoidi è l' asse maggiore dell' ellisse generatrice di tal solido, e nell' altra è il minore. E perchè quella conformasi ad un uovo, e questa ad un' arancia, la prima convenevolmente fu detta *sferoide*, o *sferoide allungata*, e l' altra poi *sferoide compressa*, o *schiacciata*. Ma conducendo nell' iperbole MAK [*fig.1.*] l' ordinata MK all' asse AN, e compito il parallelogrammo MFLK dalle coordinate de' punti M, K; perchè mai chiamasi *cilindroide* il solido, che nasce dal rivolgersi intorno all' asse conjugato *b*CB della detta curva, lo spazio mistilineo MFLKA? Questo solido ha per sue basi due cerchi uguali, e paralleli, che sono quelli de' raggi FM, LK, ed è cinto dalla superficie cava generata dalla curva MAK colla proposta rivoluzione: onde per una certa conformità, ch' ei tiene al cilindro retto, ha potuto denominarsi *cilindroide*. Si aggiunga a ciò, che tal superficie può anche intendersi generata da una retta in convenevol modo situata per rapporto all' asse, del pari che avviene per la superficie del cilindro (*Veg. la nostra* Geometria di Sito).

558. Def. IV. In una curva qualunque, se ciascuna semiordinata all' asse si protragga oltre questo, finchè la parte prodotta pareggi la normale corrispondente; la nuova curva, che passa per gli estremi di tutte le semiordinate così prolungate, rapportata al detto asse, si dirà *scala delle normali* della prima curva.

---

* Questa denominazione, sebbene men propria dell' altra; purtuttavia è la più usata.

### PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

359. La scala delle normali di una data parabola ALD [ *fig.*2. ] è l' altra parabola BEK d' identico parametro, la quale tiene il vertice, ed il fuoco nel punto di sublimità, e nel vertice della parabola data rispettivamente.

DIM. L' ordinata qualunque DC nella parabola ALD si produca fino ad incontrare in K la parabola descritta BEK, e sia DS la normale corrispondente al punto D dalla parabola ALD; ond' è che CS dinoti la corrispondente sunnormale; sarà $DS^2$ uguale a $DF \times AT$ (107.). Ma è pure $CK^2$ uguale a $BC \times AT$, ed è BC uguale ad FD (105.). Laonde risulterà $DS^2$ uguale a $CK^2$, e DS uguale a CK; che però la parabola BEK sarà scala delle normali per l' altra ALD (*def.* 4.) — *C. B.D.*

### PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

360. La scala delle normali di una data ellisse AM*a* [ *fig.*3.] è l' altra ellisse GEH, che ha comune con la prima curva il centro, e l'asse minore; e tiene per asse maggiore la terza proporzionale in ordine alla distanza de' fuochi, ed all' asse maggiore dell' ellisse data.

DIM. Da un qualunque punto M dell' ellisse proposta AM*a* si ordini all' asse A*a* la MP, che si prolunghi fino all' altra

ellisse GEH in N ; e pel medesimo punto M si tiri all'ellisse AM$a$ la normale MS, e la retta $g$M$h$ perpendicolare alle due linee di sublimità G$g$, H$h$ dell' ellisse data.

Ed essendo sì M$g$ ad MF, che M$h$ ad M$f$, come OA : OF (197.) :: OG : OA ; sarà $g$M$h$, o GPH : FM$f$ :: OG² : OA². Ma è pure FM$f$: MS² :: OA² : OE² (196.). Dunque, per egualità, starà GPH : MS² :: OG² : OE² :: GPH : PN² ; e quindi sarà MS² uguale a PN², ed MS uguale a PN. Laonde l' ellisse GEH sarà scala delle normali per l' altra AM$a$. — *C.B.D.*

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

561. La scala delle normali di una data iperbole AM$a$ [*fig*.4.], è l' altra iperbole GNE, che ha comune con la prima curva il centro, e l' asse secondario, e tiene per asse primario la terza proporzionale in ordine alla distanza de' fuochi, ed all' asse principale di quella data iperbole.

Vi si potrà adattare la stessa dimostrazione della proposizione precedente, con riscontrare la figura quassù indicata.

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

562. La scala delle normali di una data ellisse ABED [*fig*.5.], rapportata all' asse minore BD, è il convesso dell' iperbole ASG, avente comune il centro C, e il semiasse primario AC con l' ellisse

data, e per semiasse secondario la terza proporzionale C$b$ in ordine all'eccentricità CF, ed al semiasse minore CB.

Dim. I. Per un punto qualunque S dell'iperbole ASG così descritta, si tiri all'asse secondario BD la semiordinata SQ, starà $SQ^2 : CQ^2 + Cb^2 :: AC^2 : Cb^2$ (262.).

II. Or pel punto M, ove la SQ taglia l'ellisse, si tiri a questa curva la normale MN; sarà la ragione di $AC^2 : CB^2$ uguale tanto a quella di $MQ^2 : CB^2 - CQ^2$(134.), che all'altra di NQ : CQ (161.), ovvero di $NQ^2$: NQC. Laonde starà $MQ^2 : CB^2 - CQ^2 :: NQ^2 : NQC$; e però, permutando, componendo, e di nuovo permutando, si avrà $MN^2 : CB^2 + NCQ :: NQ^2 : NQC :: NQ : QC :: AC^2 : CB^2$ (161 e 146).

III. Ciò posto si unisca la FB, cui si elevi da B la perpendicolare BK; starà CF : CB :: CB : CK, o sarà perciò CK ugnale a C$b$. Ed essendo $NQ : CQ :: AC^2 : CB^2$ (146 e 161), dividendo, si avrà $NC : CQ :: CF^2 : CB^2$ (182.), ovvero $NCQ : CQ^2 :: CB^2 : Cb^2$; d'onde rilevasi $NCQ + CB^2 : CQ^2 + Cb^2 :: CB^2 : Cb^2$ *(12.El.V.)*. La quale analogia, e quella del n.I, per egualità, danno $SQ^2 : CB^2 + NCQ :: AC^2 : CB^2$. Ma dall'ultima analogia del n. II. si aveva $CB^2 + NCQ : MN^2 :: CB^2 : AC^2$. Adunque, di nuovo per egualità, otterrassi $SQ^2$ uguale ad $MN^2$, ed SQ uguale alla normale MN. Come si era proposto nel teorema.

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

563. La scala delle normali di una data iperbole GA$g$ [*fig*.6.] rapportata all'asse secondario BD, è il convesso di un'altra iperbole, avente comune il centro C, e'l semiasse primario AC con l'iperbole data, e

per semiasse secondario la terza proporzionale $Cb$ in ordine all'eccentricità CF, ed al semiasse minore CB.

La dimostrazione è uniforme a quella della precedente proposizione. Si avverte solamente, che nel n. II. dee cambiarsi il $CB^2 - CQ^2$ in $CB^2 + CQ^2$, e nel n. III. il *dividendo* in *componendo*.

## PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

564. Nella curva qualunque $ac$P [*fig.* 7.], rapportata all' asse AF, iscrivansi i rettangoli B$a$, C$b$, D$c$..,, e ad essa circoscrivansi i corrispondenti B$f$, C$g$, D$h$ ... : dico che la figura mistilinea A$a$PF debba terminare tanto nella somma de' rettangoli iscritti, che in quella de' circoscritti.

E se la detta figura A$a$PF, terminata dalla curva $ac$P, insiem con que' rettangoli iscritti, e circoscritti, si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo asse AF; nel solido da essa generato dovrà terminare tanto la somma de' cilindri descritti da que' rettangoli, che da questi rispettivamente.

Dim. Part. I. I lati $a$M, $b$N, $c$O . . ., di que' rettangoli iscritti nella proposta figura si protraggano, fino ad incontrare i lati EQ, FP dell' ultimo rettangolo FQ; sarà il rettangolo M$f$ uguale all' altro TX. Imperocchè le M$b$, SX sono uguali fra loro, come lati opposti del parallelogrammo M$b$XS; e le altre linee rette $a$M, ST son pure uguali, per dover pareggiare le AB, EF, che nella proposta iscrizione, e circoscrizione de' rettangoli nella curva A$a$PF debbonsi sap-

porre uguali tra loro. Laonde l' eccesso del rettangolo circoscritto $Bf$ sul corrispondente iscritto $Ba$, che vedesi essere il rettangoletto $Mf$, sarà espresso dall' altro TX. Similmente si dimostra, che i rettangoletti XZ, VR ... dinotino gli eccessi de' rettangoli circoscritti $Cg$, $Dh$ ... sugl' iscritti $Cb$, $Dc$ . . . Onde sarà chiaro essere il rettangolo TQ la totale differenza di tutt' i rettangoli iscritti da circoscritti. Ma ciascuna delle altezze di cotesti rettangoli può divenir minore di qualunque linea retta data. Dunque benanche il rettangolo TQ può farsi minore di qualunque dato. E quindi nella proposta figura dovrà terminare sì la somma de' rettangoli in essa iscritti, che quella de' circoscritti. — *C. B. D.*

Part. II. La dimostrazione della seconda parte può farsi analogamente a quella della prima.

565. Scol. La parte I. del precedente teorema ha pur luogo, se la curva fosse riferita ad un qualunque diametro; nel qual caso i quadrilateri iscritti $Ba$, $Cb$, $Dc$ ..., ed i circoscritti corrispondenti fossero però parallelogrammi. E la dimostrazione n' è la stessa.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

566. Se le due curve ASQ, $ASq$ [*fig*.8.] rapportate al comune asse AX sieno tali, che le ordinate NE, $Ne$ corrispondenti ad una medesima ascissa AN sieno sempre nella costante ragione di $m$ ad $n$; anche le aje corrispondenti ANE, $ANe$ dovranno essere in quella ragione costante di $m$ ad $n$.

Ed aggirandosi le aje ANE, $ANe$ con perfetta rivoluzione intorno al comun loro asse AN; i solidi generati da esse saranno in duplicata ragione di $m$ ad $n$, o sia come $m^2$ ad $n^2$.

Dim. Part. i. L' ascissa comune AN intendasi divisa in un qualunque numero di particelle uguali N$p$, $pq$ ..., e pe' punti della divisione $p$,$q$ ... si ordinino nell' una, e nell' altra curva le $p$R, $q$S ..., $pr$, $qs$ ... Sarà il rettangoletto di $p$N in NE all' altro di $p$N in N$e$, come NE : N$e$, cioè come $m$ : $n$. Similmente pe' successivi rettangoletti corrispondenti nelle due aje curvilinee proposte. Laonde starà la somma de' primi, che termina nell' aja ANE della curva AQ, a quella de' secondi, che termina nella corrispondente aja AN$e$ dell' altra curva A$q$, come $m$ ad $n$ *(prop. F. El. V.)*.

Part. ii. Inoltre i cerchi, che nell' indicata rivoluzione vengonsi a generare dalle ordinate NE, N$e$, sono in duplicata ragione di queste rette, cioè come $m^2$ : $n^2$. E lo stesso per le altre delle già dette ordinate; che però i cilindri, che hanno per basi essi cerchi rispettivamente, e per altezza comune le N$p$, $pq$ ..., dovendo essere come tali basi, si conchiuderà facilmente, che stia la somma de' primi a quella de' secondi, come $m^2$ : $n^2$; cioè il solido generato da ANE, nel rivolgersi intorno ad AN, a quello che si genera dal rivolgersi AN$e$ intorno alla stessa ascissa, starà come $m^2$ : $n^2$ — *C. B. D.*

567. Scol. La parte i. del precedente teorema ha pur luogo quando le curve fossero rapportate ad un qualunque diametro, e nello stesso angolo delle coordinate.

568. E sarà poi facile il rilevare come quel rapporto costante risulti modificato nel caso di angoli delle coordinate diversi.

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

569. Se il trilineo ADC [*fig.* 9.] terminato dalla curva AD con le ordinate all' asse AC, si aggi-

ri con perfetta rivoluzione intorno a questo; la superficie del solido, che si genera, sarà quarta proporzionale in ordine al raggio di un cerchio, alla sua periferia, ed alla corrispondente aja ACKE nella scala delle normali.

**Dim.** L' ascissa CA si divida nelle particelle uguali CP, PO...., qualunque sia il numero di esso; e le ordinate O*d*, P*e* si protraggano, finchè incontrino la tangente DM, in M, Q. Poi dal punto Q medio della DM, e dall' estremo M conducansi le QV, M*r* rispettivamente parallele alla normale DS, ed all' ascissa AC. Sarà l' angolo PVQ uguale all' altro MQ*t*; poichè ciascun di essi compie un retto col medesimo angolo PQV. Onde il triangolo rettangolo PQV sarà simile all'altro triangolo M*t*Q rettangolo in *t*; e quindi benanche al suo equiangolo M*r*D. E dovendo essere, per la simiglianza de'triangoli QPV, M*r*D, MD ad M*r*, come QV a QP, o come la circonferenza del raggio QV a quella del raggio QP; sarà il rettangolo della MD nella circonferenza di QP uguale al rettangolo di M*r*, o di CO nella circonferenza di QV. Ma il rettangolo di CO nella circonferenza di QV sta al rettangolo di CO in QV nella costante ragione della circonferenza di un cerchio al raggio. Dunque in questa ragione dovrà stare il rettangolo della MD nella circonferenza di QP al rettangolo di CO in QV.

Ciò premesso la superficie del cono troncato, la quale si genera dalla tangente MD rivolta intorno all' asse AC della detta curva, è uguale al rettangolo della medesima MD nella circonferenza del raggio QP (*scol.1. pr. 13.Arch.*). Quindi la superficie conica di DM starà al rettangolo di CO in QV, come la circonferenza di un cerchio al raggio. E ciò sempre dimostrandosi, saranno tutte quelle superficie coniche a tutti quegli altri rettangoli, come la circonferenza di un cerchio al raggio. Ma le dette superficie coniche vanno a ter-

minare nella superficie del proposto solido ; ed i mentovati rettangoli , confondendosi in tal caso con quelli, che si fanno dagli elementi dell' ascissa AC nelle corrispondenti loro normali, anch' essi terminano nell'aja ACKE della scala delle normali. Dunque sarà là superficie del solido, che si genera dalla rivoluzione della figura ALDC intorno al suo assa AC alla corrispondente scala ACKE delle normali , come la circonferenza di un cerchio al raggio. — *C.B.D.*

570.Cor.1. Supposta la quadratura della scala delle normali ACKE , che venghi però espressa da 2M', si avrà M: *circ.*M :: 2M' : *superf.gen.* da ADC, ossia 2M': 2M×*circ.*M :: 2M': *superf. gen.* da ADC. Laonde sarà la superficie generata da ADC uguale al cerchio del raggio 2M.

571. Scol. Volendo saggiare la verità dimostrata nel teorema in un caso di superficie generata già conosciuta, come quella della sfera , si osservi che la scala delle normali pel semicerchio generatore della sfera è rappresentata dal rettangolo del diametro di quel semicerchio nel raggio , al quale tutte le normali per qualunque punto della circonferenza sono uguali ; e però la superficie sferica dovrà risultare quarta proporzionale in ordine ad $r$ , $c$ , $2r^2$ ( dinotando il raggio con $r$ , e la circonferenza con $c$ ) , e quindi verrà espressa da $2rc$, ch' è per l' appunto il cerchio del raggio $2r$ (*Arch.pr.3., e scol.pr.24.*) .

## PROPOSIZIONE IX.

### TEOREMA.

572.I trilinei AEN, AeN [*fig.*8. ] in due qualunque curve coniche della medesima specie,i quali abbiano, per uno stesso asse , una comune ascissa, sono tra loro in sudduplicata ragione de' rispettivi parametri per l' asse comune.

Ed i solidi generati da' trilinei suddetti saranno come i parametri corrispondenti a tal asse nelle curve generatrici.

Dim. Part. i. Se le curve ASE, Ase sieno parabole, saranno i quadrati delle semiordinate NE, Ne; pR, pr; qS, qs . . . corrispondenti alle ascisse comuni AN, Ap, Aq . . . come i rispettivi parametri; e però esse semiordinate in suddupplicata ragione di tali parametri. Laonde per la precedente prop. 7. que' trilinei saranno ancor essi in suddnplicata ragione de' parametri.

Che se que' trilinei AEN, AeN appartengansi a due ellissi, o a due iperboli; sarà uno stesso il rettangolo per ciascun punto N, p, q, . . corrispondente ad un medesimo diametro nell' una, e l' altra di esse curve; e però i quadrati delle semiordinate per que' punti dovranno risultare proporzionali a'parametri; e quindi le semiordinate essendo in suddupplicata ragione de' parametri, nella stessa ragione saranno i trilinei AEN, AeN (*prop. 7. §. 566.*).

Part. ii. La dimostrazione della parte ii. è conseguenza della prima, e della parte ii. della prop. 7.

573. Cor. 1. Quindi i trilinei ellittici AEN, AeN, o iperbolici saranno tra loro come i diametri conjugati rispettivi al loro comune diametro nel vertice A (146, 290.).

574. Cor. 2. E se essendo AEN un trilineo ellittico, l' altro AeN fosse circolare, cioè di un ellisse ad assi uguali; starà il trilineo ellittico AEN al corrispondente trilineo circolare AeN, come il diametro conjugato a quello dell'ellisse, o del cerchio per A sta a questo. E però anche l'intera semiellisse al semicerchio sul diametro stesso, e l' ellisse al cerchio, come il diametro conjugato a quello della semiellisse, o del cerchio al diametro di questo.

E ciò conduce, com' è manifesto, alla quadratura dell' ellisse, o di un segmento di essa per un'ordinata all' asse.

575. Cor. 3. Ed i solidi generati da que' trilinei AEN, AeN, rapportati alla stessa ascissa AN dell' asse comune delle ellissi AEQ, Aeq, o delle iperboli, saranno in duplicata ragione degli assi conjugati rispettivi di esse. E trattandosi di un trilineo ellittico, ed altro circolare, saranno in duplicata ragione dell' asse conjugato dell' ellisse al principale, cioè al diametro del cerchio. E ciò conduce alla cubatura della sferoide, dell' ellissoide, e de' segmenti loro con piani perpendicolari all' asse.

576. Scol. 1. Se le curve MPY, RSZ [ *fig. 10.* ] fossero due iperboli tra gli stessi assintoti CH, CL, sarebbesi in pari modo dimostrato, che i quadrilinei MNQP, RNQS corrispondenti in esse alle medesime ascisse CN, CQ sieno tra loro come le potenze di tali iperboli; ed i solidi generati da essi quadrilinei, rivolgendosi intorno all' assintoto delle ascisse ( supponendo parilatere le iperboli ), sieno in duplicata ragione di tali potenze.

577. Scol. 2. Il soggetto della proposizione dimostrata può estendersi per la part. I. a' trilinei intorno ad uno stesso diametro, e nello stesso angolo delle coordinate; e rendersi pure, nel modo conveniente, generale per quelli di qualsivogliano curve della stessa specie, descritti intorno ad uno stesso diametro, e ad una comune ascissa.

## CAPITOLO II.

### La misura delle aje delle sezioni coniche, e delle superficie de' solidi da esse generati.

### PROPOSIZIONE X.

#### TEOREMA.

578. Il trilineo parabolico AMF [*fig.* 11.] racchiuso dalle coordinate AF, FM ad un qualunque diametro AF, e dall' arco AM, ch' è tra esse, è due terzi del parallelogrammo AFMP, che compiesi dalle medesime coordinate.

Dim. La retta PA intendasi divisa nelle particelle uguali PR, R*r* ..., qualunque sia il numero di esse; e dal punto P si elevi ad AP la perpendicolare PQ di quella lunghezza che piaccia. Di poi compito il parallelogrammo PQTA vi si tiri la diagonale AQ; e pe' punti R, *r*. . . si conducano le RE, *re* . . . parallele ad AF, e le altre RS, *rs* . . . parallele a PQ. E così pure da' punti G, *g* ..., segnati nella curva AGM dalle RE. *re*..., non meno che dagli altri punti C, *c* ..., si tirino le GN, *gn* . . . CD, *cd* . . . parallele ad AP. Finalmente il rettangolo PQTP si supponga rivolto con perfetta rivoluzione intorno ad AP.

Ciò premesso il parallelogrammo MPRE sta all' altro NPRG, come MP a PN (*1. VI.*), o come FA ad AB. Ma FA : AB :: FM² : BG² (49.), cioè come PA² ad RA², o come PQ² ad RC², pe' triangoli simili QPA, CRA. Ed in questa ragione sono pure i due cilindri generati, nella supposta rivoluzione, da' rettangoli PQSR, PDCR (*11 e 2. El. XII.*). Dunque sarà il parallelogrammo MPRF all'altro NPRG, co-

me il cilindro generato dal rettangolo PQSR all' altro generato dal rettangolo PDCR. E ciò sempre dimostrandosi, saranno tutt' i parallelogrammi MPRE , ER*re* ..., che compongono l' intero parallelogrammo MPAF , a tutt' i parallelogrammi PNGR, R*ngr* . . . , che sono iscritti nello spazio parabolico esterno MPA , come tutti que' cilindri di PQSR , di SR*rs* . . . , che costituiscono il cilindro generato dal rettangolo PQTA rivolto intorno a PA, a tutt'i cilindri di PDCR, di R*dcr*. . . iscritti nel cono generato dalla rivoluzione del triangolo PQA intorno a PA *(pr.F.El.V.)*.

Ma i parallelogrammi PNGR,R*ngr*... terminano nel trilineo parabolico MPA (564.), siccome nel cono di PQA van pure a terminare i detti cilindri de' rettangoli PDCR , R*dcr* . . . Adunque sarà il parallelogrammo MPAF al trilineo parabolico MPA, come il cilindro generato dal rettangolo PQTA al cono generato dal triangolo PQA, cioè come 3 ad 1 (*10.XII*). Quindi il trilineo MPA è un terzo del parallelogrammo MPAF; e però lo spazio parabolico interno MFA dovrà essere due terzi dello stesso parallelogrammo delle coordinate AF,FM . *C.B.D*

579.Cor. 1.Gli spazi parabolici AMF, AGB essendo parti simili de' parallelogrammi delle coordinate AFMP,ABGR, saranno al par di questi in ragion composta dalla ragione di AF ad AB, e di FM a BG *(15.El.V, e 23.VI.)*.

580. Cor. 2. Ed essendo la prima di queste due ragioni componenti duplicata dell' altra (49. ) , la ragione composta da esse sarà triplicata della seconda , o *sesquiplicata* della prima *, cioè : *Gli spazi parabolici racchiusi dalle coordinate ad un medesimo diametro , e da' rispettivi archi , sono fra loro in triplicata ragione delle semiordinate , o in sesquiplicata delle ascisse.*

581. Scol. Essendo il trilineo parabolico AGMF due ter-

---

* La ragione , che si compone da due altre , di cui la prima sia duplicata della seconda , dicesi *sesquiplicata* della prima .

ze parti del parallelogrammo AFMP, ch' è compreso dalle coordinate AF, FM di quel trilineo, sarà quattro terzi del triangolo AFM, e però *sesquiterzio* di tal triangolo, secondo la frase degli antichi. Da che risulta rischiarata l' esibizione data di esso trilineo da Archimede, nelle prop. 17, e 24 del libro *quadratura paraboles*.

## PROPOSIZIONE XI.

### TEOREMA.

582. L' ellisse sta al rettangolo de' suoi assi, come l' è un cerchio al quadrato del diametro.

**Dim.** Si è veduto esser l' ellisse al cerchio di un suo asse come l' altro asse a questo (574.); e però come il rettangolo de' due assi al quadrato di quello, ch' è diametro del cerchio. Laonde, permutando, starà l'ellisse al rettangolo degli assi come il cerchio al quadrato del diametro — *C.B.D.*

583. Cor. 1. Il cerchio che abbia per un suo diametro l' asse maggiore di un' ellisse suol dirsi *circoscritto* a questa curva; ed *iscritto* ad essa n' è l' altro il cui diametro sia l'asse minore. Adunque: *L' ellisse sta al cerchio ad essa circoscritto, come l' asse minore al maggiore*: e viceversa *a quello in essa iscritto, come l' asse maggiore al minore.*

584. Cor. 2. Essendo costante il rapporto di un cerchio al quadrato circoscrittogli (*prop.4. mis. del cerchio*): *le aje di due qualunque ellissi saranno proporzionali a' rettangoli de' loro assi conjugati.*

585. Cor.3. E se mai queste due ellissi sieno *simili* (333): *le aje di tali figure dovranno essere in duplicata ragione de' loro assi maggiori, o de' minori.*

586. Scol. Gli assi di un' ellisse sieno dinotati da P,Q, tra' quali sia media proporzionale la M, starà l' ellisse al cerchio del diametro P, come $P \times Q : P^2 :: M^2 : P^2 :: \frac{1}{4} M^2 : \frac{1}{4} P^2$

:: ($\frac{1}{2}$M : $\frac{1}{2}$P)(*circ.* $\frac{1}{2}$M : *circ.* $\frac{1}{2}$P); e però :: $\frac{1}{2}$M × *circ.* $\frac{1}{2}$M : $\frac{1}{2}$P × *circ.* $\frac{1}{2}$P. Ma questo rettangolo è precisamente il cerchio del diametro P secondo termine della proporzione. Adunque il primo termine di questa, cioè l' aja dell'ellisse dovrà pareggiare il cerchio del diametro M. Vale a dire:

*L' ellisse è quanto il cerchio del diametro la media proporzionale tra' suoi assi.*

### PROPOSIZIONE XII.

#### TEOREMA.

587. Se le ascisse CA, CB, CD [*fig.* 12.] dell'iperbole GFE rapportata agli assintoti CD, CL sieno continuamente proporzionali, e loro conducansi le ordinate AE, BF, HG; il quadrilineo iperbolico ABFE, che ne tolgono le due prime ordinate AE, BF, sarà quanto l' altro BDCF, che vien troncato dalla seconda ordinata BF, e dalla terza DG.

E se dal centro C di quest' iperbole agli estremi delle dette ordinate si tirino le rette CE, CF, CG; anche saranno tra loro uguali, ed a que' quadrilinei, i due settori ECF, FCG.

Dim. Part. 1. Prendansi delle rette AB, BD, le due parti simili A*a*, B*b*, e si compiano i parallelogrammi AE*ea*, BF*fb*, che dovranno essere uguali tra loro. Poichè essendo per supposizione CA : CB :: CB : CD, sarà CA : CB :: AB : BD. Ma la prima di queste due ragioni, per la natura di una tal' iperbole, è uguale a quella di BF ad AE (250.), ed alla seconda di esse si è fatta uguale l' altra di A*a* a B*b*. Dunque sarà pure BF : AE :: A*a* : B*b*; e quindi il parallelogrammo AE*ea* sarà uguale al suo equiangolo BF*fb*.

Inoltre essendo, per le anzidette cose, CA : CB:: Aa : Bb, sarà Ca : Cb :: Aa : Bb. Onde, se prendansi le *am*, *br* rispettivamente uguali alle Aa, Bb, o si compiano i parallelogrammi *camn*, *dbrt*; sarà benanche *am* : *br* :: Ca : Cb :: *bd* : *ac*; e quindi il parallelogrammo *camn* dovrà uguagliare l'altro *dbrt*. Nella stessa maniera può dimostrarsi, che gli altri parallelogrammi circoscritti all'aja iperbolica EABF sieno uguali a' corrispondenti, circoscritti all' altra FBDG. Laonde dovranno esser tra se uguali le due ajc EABF, FBDG.

Part. ii. Il triangolo CEA è poi uguale all' altro CFB, perciocchè essi sono metà de' parallelogrammi uguali, che si compirebbero dalle CA, AE, e dalle CB, BF (251.). Dunque togliendo da que' triangoli l' altro CAO, che loro è di comune; dovrà rimanere il triangolo CEO uguale al trapezio AOFB. Inoltre a questi spazi uguali aggiungasi il triangolo mistilineo EOF; risulterà il settore iperbolico ECF uguale al quadrilineo adjacente EABF. E potendosi dimostrare nello stesso modo, che l' altro settore FCG sia uguale al quadrilineo iperbolico FBDG; sarà vero il teorema proposto. — *C.B.D.*

588. Cor. 1. Se le ascisse CA, CB, CD, CE, CF, ... [*fig.13.*] della detta iperbole tra gli assintoti sieno continuamente proporzionali; i quadrilinei iperbolici GABH, HBDI, IDEK, KEFL ..., saranno uguali. E gli altri quadrilinei GABH, GADI, GAEK, GAFL, ... dovranno essere come i numeri naturali 1, 2, 3, 4, ...

589. Cor. 2. Dunque gli spazi iperbolici GABH, GADI, GAEK, GAFL ... saranno *logaritmi** delle ascisse CB, CD, CE, CF, ... o delle quantità delle ragioni di CB a CA, di CD a CA, di CE a CA, di CF a CA ...

590. Cor. 3. E potendosi continuare all' infinito la serie delle ascisse CA, CB, CD, CE, CF, ... continuamente pro-

* Si abbiano presenti i numeri 489, 490 del vol. I. dell' *Analisi Algebrica*.

porzionali ; infiniti uguali spazi iperbolici GABH, HBDI, IDEK , KEFL . . . dovranno contenersi nello spazio assintotico AFXLG . *Dunque lo spazio assintotico* AFXLG , *che da' §§.228 e 231 risulta d'infinita lunghezza, quì vedesi aver benanche un' aja infinita.*

591.Cor.4.*Dato il quadrilineo iperbolico* EKLF,*facilmente può farglisi un altro uguale , che poggi sull' ordinata* AG *della stessa iperbole.* In fatti presa l'ascissa CB quarta proporzionale in ordine alle tre date ascisse CE, CF, CA, ed ordinata in detta curva per lo punto B la BH, sarà il quadrilineo iperbolico GABH uguale al dato KEFL . Lo che può dimostrarsi come la part. 1. della presente proposizione.

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

592. Data un' iperbole parilatera [*fig.* 14.], ed un quadrilineo di essa ; determinar la ragione di questo al rettangolo delle sottoposte coordinate.

Soluz. Per rettangolo delle coordinate può prendersi la potenza della data iperbole GIIM (249.), cioè il rettangolo delle coordinate uguali CA, AM, ciascuna delle quali esprimasi per l' unità. Ed a quel dato quadrilineo iperbolico può supporsi uguale il quadrilineo DAMG ( 591. ) , che poggi sull' ordinata AM . Ciò posto , prendasi l' ascissa CB media proporzionale tra le date ascisse CD , CA , sarà il quadrilineo iperbolico DAMG uguale a 2BAMH ( 587. ). E prendendo la CE media proporzionale tra le CB , CA , sarà pure BAMH uguale a 2EAMI ; e quindi DAMG uguale a $2^2 \times$ EAMI . Similmente , se prendasi la CF media proporzionale tra le CE , CA , si vedrà essere DAMG uguale a $2^3 \times$ FAMK . E così più oltre procedendo si potrà conchiu-

dere; per una chiara induzione, che se l'ascissa $Ca$ dinoti l'ultima di coteste medie proporzionali preso un numero $n$ di volte, debba essere quel quadrilineo iperbolico DAMG uguale a $2^n \times AamM$. Or da queste cose potremo prossimamente valutare l'anzidetto quadrilineo, nel seguente modo.

Pongasi l'ascissa CD uguale ad $h$; ed essendo $CA \times CD = 1 \times CD = CB^2$, sarà $CB = \sqrt{h}$. E se questa radice di $h$ esprimasi per $k$, sarà $CE = \sqrt{k}$, essendo, per costruzione, $CE^2$ uguale a $CA \times CB$. Similmente, se dinoteremo per $l$ la radice di $k$, si avrà $CF = \sqrt{l}$, per essere $CF^2 = CA \times CE$. Ed in fine se dal numero $h$ estraggasi la radice quadrata $n$ di volte seguitamente, e tal radice esprimasi per $r$, sarà $Ca = r$, $Aa = Ca - CA = r - 1$, $Aa \times AM = (r-1) \times 1$, ed $Aa \times am = \frac{r-1}{r}$ (250). Or quando la $n$ sia abbastanza grande, i rettangoletti $AaSM$, $Aamt$ si potranno prendere per limiti del quadrilineo iperbolico $AamM$; e però questo, con una conveniente approssimazione, potrà rappresentarsi per quelli, cioè per la media aritmetica tra $r-1$, ed $\frac{r-1}{r}$, la quale è $\frac{(r+1)(r-1)}{2r} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$. Laonde essendosi dimostrato il quadrilineo $DAMG = 2^n \times AamM$, risulterà esso $= 2^{n-1}\left(r - \frac{1}{r}\right)$. E ciò con tanta maggiore approssimazione, per quanto la $n$ sarà più grande; potendosi per limite minore di essa stabilire il 30.

593. Cor. 1. I quadrilinei iperbolici DAMG, BAMH, EAMI FAMK, ... sono nella ragione de' seguenti numeri 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ ...; e quindi geometricamente proporzionali al par di questi.

594. Cor. 2. Sebbene dal precedente problema ne apparisca esibita la quadratura del quadrilineo iperbolico DAMG per l'iperbole parilatera della potenza 1., si vede però, che per mezzo dello scol. 1. prop. IX. (576.) risulti determinato

quello corrispondente alla medesima ascissa, per qualunque altra iperbole parilatera. E combinando ciò col §.589. si vedrà che :

*Un quadrilineo iperbolico per qualunque iperbole parilatera è quanto la potenza dell'iperbole cui appartiene moltiplicata pel logaritmo iperbolico della ragione delle ordinate che il terminano.*

595. Scol. Col metodo de' limiti di sopra recato, ch'è alquanto analogo a quello, che fu praticato da Archimede, per la misura del cerchio, avrebbesi potuto quadrare l'iperbole, assai prima che si fossero scoperti i logaritmi. E sebbene a dì nostri per mezzo di serie convergentissime si quadrino le iperboli, e si rinvengano i logaritmi de' numeri, pure a rigor di scienza dovrebbesi stimar l' errore, che risulta da' termini omessi, come saggiamente avvertì il Lagrange. La qual cosa essendo di una malagevole indagine, il metodo quassù adoperato dee riputarsi più esatto di quello, che si esegue colla somma di serie convergenti.

## PROPOSIZIONE XIV.

### TEOREMA.

596. Sia DBC [*fig.* 15.] un' iperbole parilatera, e la DC una qualunque ordinata all' asse principale AB ; il segmento iperbolico DBC, che questa retta tronca da quella curva, mancherà dal rettangolo della semiordinata DR nell' ascissa AR, per quanto è il quadrato del semiasse principale AB moltiplicato pel logaritmo della ragione della somma di esse coordinate AR, RD al detto semiasse.

Dim. Gli assintoti della proposta iperbole sieno le rette

QAs, PAg, le altre due rette AB, AL dinotino i suoi semiassi conjugati; e poi da' punti B,D conducansi le rette BS, DF parallele all' assintoto AP.

Ciò premesso, i quattro triangoli ABS, DGF, AGE, AgE sono rettangoli, ed isosceli, com' è chiaro, per essere semiretto l' angolo BAQ ( 239. ). Dunque la Dg, ch' è uguale alle due DE, Eg, cioè alle due DE, EA, sarà uguale alla somma delle due coordinate AR,RD. Ed essendo il rettangolo gDG uguale ad AB² (236.), starà Dg : AB :: AB : DG, cioè AR + RD : AB :: AB : DG :: BS : DF, pe' triangoli simili ABS, DGF; e 'l quadrilineo iperbolico SFDB, o il suo uguale settore ADB ( 587. *part.2.* ), sarà uguale alla potenza P moltiplicata pel logaritmo della ragione di AR+RD ad AB (594.). Dunque il trilineo iperbolico BDR, ch' è differenza del triangolo ADR, e del settore iperbolico ADB, sarà uguale alla metà del rettangolo di AR in RD, meno la potenza di tale iperbole moltiplicata pel logaritmo della ragione di AR + RD ad AB. E prendendo i loro doppi, si vedrà, che il segmento iperbolico DBC debba mancare del rettangolo delle coordinate AR, RD, per la doppia potenza di essa iperbole, cioè pel quadrato del semiasse AB moltiplicato pel logaritmo della ragione di AR + RD ad AB. — *C. B. D.*

597. Cor. 1. Per la similitudine de' triangoli AEG, GFD, essendo AG : GE :: GD : GF, sarà il rettangolo AGF uguale all' altro EGD, e quindi 2AGF uguale a 2EGD. Sicchè unendo ad essi rispettivamente gli uguali spazi AG², 2EG², risulterà AF² — FG² uguale a 2DEG, o sia AF² — FD² uguale a 2ARD. Cioè:

*Nell' iperbole parilatera, il rettangolo delle coordinate all' asse* ( ove il centro sia il principio delle ascisse ) *è suddupplo della differenza de' quadrati delle corrispondenti coordinate agli assintoti di essa curva.*

598. Cor. 2. *Il quadrilineo iperbolico ABDF sarà uguale*

*al triangolo AFD aggiuntavi la potenza dell'iperbole moltiplicata pel logaritmo iperbolico della ragione di AR+RD ad AB.*

599. Ottenutasi la misura del trilinco iperbolico, per le ordinate all' asse, nell' iperbole parilatera, rimane esibita ancor quella per qualunqne altra iperbole, riferita alla medesima ascissa, per l' asse medesimo ( 566. *part. I.*).

600. Scol. Nell' iperbole FAM [ *fig. 16.* ) sion tirate le due corde parallele FQM, DPL, e se ne assegni il diametro CRPQ. Saranno uguali tra loro i trilinei DRP, LRP; FRQ, MRQ, come può rilevarsi col mezzo del §. 576; e però anche uguali saranno le differenze loro, cioè i quadrilateri mistilinei PDFQ, PLMQ. Ma congiunte le LM, DF, sono ancora uguali i trapezi DPQF, LPQM. Adnnque il saranno ancora i segmenti iperbolici DrF, LvM.

Or da' pnnti F, D, L, M si ordinino all' asse conjugato della detta iperbole le FE, DB, LI, MK; sarà chiaro, che sia la stessa la differenza de' trapezi LIKM, DBEF, che de' quadrilinei iperbolici ILvMK, BDrFE; e perciò la differenza di questi due quadrilinei risulterà quadrabile. Cioè: *sarà quadrabile la differenza di due quadrilinei iperbolici, di cui nessuno sia quadrabile*. Che è un nuovo paradosso geometrico, analogo a quello, che per la differenza di due archi parabolici rilevò il conte Fagnano. Di che più appresso.

## SCOLIO GENERALE.

601. Poste le quadrature degli spazi conici assegnate nelle prop. x, xi, xiv, quelle delle superficie de' solidi conoidali, e sferoidali, che da quelli ottengonsi, secondo le def. 1 e 2, risultano evidentemente dalla prop. viii. ( 569. ). Ma queste quadrature possono ricevere una più elegante esibizione, come vedrassi nelle seguenti proposizioni.

## PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

602. La superficie di un conoide parabolico è quanto la differenza del quadrato del semiparametro principale dal rettangolo della normale, e del semiparametro nel punto estremo dell' arco generatore di quella superficie, moltiplicata pel rapporto della circonferenza al triplo raggio.

Dim. Sia ADC [ *fig. 2.* ] la semiparabola generatrice del conoide parabolico, ed ACKE la corrispondente scala delle normali per essa, sarà AB metà di AE, ed $AB^2$ quarta parte di $AE^2$; e però lo spazio parabolico ABE, ch' è due terze parti del rettangolo di AB in AE (578), sarà quanto $1/3 AE^2$. E l' altro CBK è pur due terzi del rettangolo di BC in CK, cioè di FD in DS (105.*part.*1.), o sia un solo terzo del rettangolo del semiparametro del punto D (104.) nella corrispondente normale DS. Laonde il quadrilineo parabolico ACKE, differenza de' trilinei BCK, BAE, sarà quanto la differenza di $1/3 AE^2$ dal rettangolo di $1/3 DS$ nel semiparametro in D. E però starà come il raggio di un cerchio alla sua circonferenza, così la differenza poc' anzi indicata alla superficie conoidale parabolica generata da ADC (569.). Da che risulta la verità enunciata.

603. Scol. La precedente espressione di misura della superficie del conoide parabolico, combinata con quella del raggio di osculo per la parabola nel vertice, e nell' altro suo estremo, rilevate ne' §§.473 e 458, dà luogo all' elegantissima esibizione di essa datane dal Fergola, cioè:

*La superficie del conoide parabolico è quanto il cerchio, il cui raggio è medio proporzionale fra la terza parte del pa-*

*rametro principale, e la differenza de' raggi d' osculo ne' punti estremi della generatrice di essa superficie.*

Al qual riducimento potranno esercitarsi i giovani (*Vegg. ancora il* §.467 *del* Tratt. anal. delle sez. con. *del Fergola*).

Ed essi potranno del pari esercitarsi in rilevare dal precedente teorema, o dalla riduzione fattane dal Fergola, la misura, che per la medesima superficie ne lasciò indicata l' Ugenio (*Horolog. oscillat.*), ch' è la seguente:

*La superficie del conoide parabolico è quanto il cerchio, che ha per raggio la media proporzionale tra la terza parte dell' ordinata per l' estremo dell' arco parabolico generatore di essa superficie, e la somma della tangente nell' estremo stesso, e della terza proporzionale in ordine ad essa più la semiordinata suddetta, ed a questa.*

La quale esibizione, come ognun vede, l' è assai meno semplice di quella precedentemente esposta.

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

604. Se col centro di un' ellisse, e coll' intervallo uguale alla terza proporzionale in ordine all' eccentricità, ed al semiasse maggiore di tal curva, si descriva un arco circolare tra le tangenti menate a' vertici dell' ellisse da una stessa parte, e che il quadrilineo circolare corrispondente si moltiplichi pel rapporto di quella terza proporzionale all' asse minore della proposta ellisse, e per l' altro della circonferenza al raggio; si otterrà la superficie della sferoide generata da quell' ellisse.

Dim. Sia AM*a* [*fig. 3.*] l' ellisse, ed OA il semiasse

maggiore, OB il minore, OF l' eccentricità; ed AK*ka* sia il quadrilineo circolare di sopra descritto, AI*ia* il corrispondente nell' ellisse GEH descritta col semiasse maggiore OG quanto la suddetta terza proporzionale raggio del cerchio, e col minore OE uguale ad OB della proposta ellisse. È chiaro che moltiplicandosi il quadrilineo circolare AK*ka* pel rapporto di OG ad OB si abbia il corrispondente quadrilineo ellittico AI*ia*, ch' è la scala delle normali per l' ellisse AM*a* (574.). Ma questo quadrilineo ellittico moltiplicato pel rapporto della circonferenza del cerchio al raggio dà la superficie della sferoide generata dall' ellisse AM*a* (569.). Adunque *ec.*

605. Scol. Dalla precedente proposizione potrebbe facilmente derivarsi l'esibizione della superficie della sferoide *pel cerchio il cui raggio sia medio proporzionale tra 'l semiasse minore dell' ellisse proposta, e l' arco circolare del quadrilineo sopraddetto accresciuto dell' intero asse minore*, ch'è quella, che con eleganza Archimedea ne diede l' Ugenio, senza dimostrarla ( *Horol. oscill.* ). Ma su di ciò fia meglio rivolgersi alla prop. LXXX. del *Trattato analitico delle Sezioni Coniche del Fergola* §. 452, ove si troverà anche indicata la formola algebrica per tale misura.

## PROPOSIZIONE XVII.

### TEOREMA.

606. Se in ordine all' eccentricità OF [ *fig.* 4. ] della data iperbole AM*a*, ed al suo semiasse primario OA si prenda la terza proporzionale OG, e dal vertice G, col semiasse primario OG, e col secondario l' istesso della proposta iperbole, descrivasi l' altra GNE, alla quale tirisi per A la semiordinata AL; sarà la superficie del conoide iperbolico,

che generasi dal trilineo APM della prima iperbole, quanto il quadrilineo iperbolico ALNF, che vi corrisponde nella seconda, moltiplicato pel rapporto della circonferenza del cerchio al suo raggio.

La dimostrazione si farà analogamente a quella del teorema precedente, col mezzo della prop.3. cap.I.

607. Scol. E dalla prop. LXXXII. part. 2. del *Trattato analitico delle Sezioni Coniche* §.462. potrà rilevarsi la formola da adoperare convenevolmente in pratica per la proposta misura.

### PROPOSIZIONE XVIII.

#### TEOREMA.

608. Se col semiasse maggiore di un'ellisse si descriva pel vertice di essa l'iperbole, che abbia per semiasse secondario la terza proporzionale in ordine all'eccentricità, ed al semiasse minore dell'ellisse, la quale incontri la tangente per l'estremo di questo; il quadrilineo iperbolico esterno ACBG [*fig*.5.], moltiplicato pel rapporto della circonferenza al raggio di un cerchio, darà la superficie della semisferoide schiacciata, che descrivesi dal quadrante ellittico ABC nel rivolgersi intorno a BC.

Dim. Ciò facilmente rilevasi dalle prop. IV. ed VIII. cap. I.

609. Scol. Dalla precedente esibizione della superficie elissoidale potrà passarsi alla seguente altra, cioè: *La superficie dell'ellissoide è uguale al cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra l'asse maggiore dell'ellisse generatrice di*

*tal superficie , e quell' arco parobolico , che tien per base l' asse minore della detta ellisse , e per vertice il punto medio dell' eccentricità di questa curva ;* la quale fu pur rinvenuta dall' Ugenio , e presentata a' geometri senza dimostrarla. Ma per essa è necessario rivolgersi alla prop. LXXXVIII. del *Trattato analitico delle Sezioni Coniche*.

## PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

610. Se col semiasse principale CA dell' iperbole AMH [*fig*.6.] , e col secondario C*b* terza proporzionale in ordine all' eccentricità CF, ed al semiasse secondario CB dell' iperbole suddetta AMH , descrivasi l' altra iperbole ASG ; il quadrilineo iperbolico ASQC moltiplicato pel rapporto della circonferenza del cerchio al raggio , darà la superficie del cilindroide generata dal rivolgersi il quadrilineo iperbolico ACQM intorno all' asse secondario BD.

DIM. La dimostrazione di tal teorema , analogo al precedente, si rileva dalle prop. V ed VIII. del cap. I.

## PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

611. L' iperbole AM [*fig*.17.] sia descritta col semiasse maggiore AE dell' ellisse ADC , e col secondario ER , che sia quarta proporzionale in ordine ad EF eccentricità di quell' ellisse, ed EA,ED semiassi maggiore, e minore di essa. Dico,che rivol-

gendosi intorno all' asse D*d* sì l' una che l'altra curva, le superficie corrispondenti dell' ellissoide, e del cilindroide sieno continuamente uguali.

Dim. Imperocchè congiunta la FD, gli si elevi in D la perpendicolare DZ ; sarà EZ il semiasse secondario dell' iperbole, ch' è scala delle normali per l' ellisse ADC rapportata all' asse minore D*d* ( 562. ) ; e similmente, congiunta la AR, e tirata ad essa dal centro E la perpendicolare EH, sarà RH il semiasse secondario dell' altra iperbole, ch' è scala delle normali per l' iperbole AM riferita all' asse secondario ER ( 563. ).

O perchè abbia luogo la continua corrispondenza di uguaglianza tra le superficie della sferoide schiacciata, e di quella del cilindroide, debbon essere identiche queste due scale di normali (569.); e quindi è d' uopo, che RH risulti quanto EZ ; il che si dimostra nel seguente modo.

Essendo EF : EA :: ED : ER, la AR è parallela alla DF ; e quindi essendo FD : DE :: FE : EK ; sarà pure FD : DE :: AE : EH ; che però, siccome la AE è uguale alla DF, così risulterà la DE uguale alla EH. Ma è poi DE : EZ::EK : KD :: EH : HR ; laonde essendo ED uguale ad EH, sarà pure RH uguale ad EZ. — *C. B. D.*

## CAPITOLO III.

### La misura de' solidi generati dalle sezioni coniche.

### PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

612. Il conoide parabolico è quanto la metà del cilindro della stessa sua base, ed altezza.

Dim. L' ascissa AC [*fig.18.*] della parabola AGK intendasi divisa nelle particelle uguali CF , FB . . . , qualunque sia il numero di esse ; e pe' punti F, B. . . sieno condotte nel rettangolo ADKC le rette FI , BV . . . parallele all' ordinata CK . Si unisca la AK , e si tirino le QT , GE . . . parallele ad AC .

I cilindri , che nella proposta rivoluzione vengonsi a generare da' rettangoli IVBF , EGBF , avendo la stess' altezza , sono come loro basi (*11. XII.*) , cioè come i cerchi de' raggi VB , GB ; ond' essi saranno in duplicata ragione di VB , ossia KC a GB ( *2. XII.* ) , cioè come CA ad AB ( 38. ). Ma i rettangoli IVBF , TQBE sono ancor essi , come è la VB , o la sua uguale KC alla QB , cioè come CA ad AB , pe' triangoli simili KAC, QAB. Adunque i mentovati cilindri saranno fra loro come i rettangoli IVBF , TQBF.

Questo stesso filo di ragionamento intendasi ancor disteso per le altre particelle della CA . Laonde sarà il cilindro di KDAC , ch' è l' aggregato de'cilindri di KIFC, di IVBF... , alla somma de' cilindri di OMFC, di EGBF . . . iscritti nel conoide parabolico, come il rettangolo KDAC somma de' rettangoli KIFC,IVBF . . . . alla somma de' rettangoli LSFG, TQBF . . . iscritti nel triangolo KAC . Ma tutt' i cilindri

de' rettangoli OMFC , EGBF . . . vanno a terminare nel conoide generato dalla parabola KAC ; e nel triangolo KAC veggonsi terminare i rettangoli TQBF , LSFC . . . Dunque sarà il cilindro di KDAC al conoide generato dalla parabola KAC , come il rettangolo KDAC al triangolo KAC , cioè come 2 ad 1. Val quanto dire il mentovato conoide è metà del cilindro , che gli si circoscrive. — *C. B. D*:

613. Cor. E quindi starà quel conoide al cono in esso iscritto come 3 : 2 ; cioè nella medesima ragione che il cilindro circoscritto alla sfera serba a questa.

## PROPOSIZIONE XXII.

### TEOREMA.

614. Se un' ellisse compia una semirivoluzione intorno all' un degli assi ; la sferoide, o l' ellissoide, che si genera, sarà due terzi del cilindro ad essa circoscritto : cioè, che ha per base il cerchio del diametro un tal asse , e per altezza l' altro asse.

Dim. Dal cor. 3. della prop. ix. si ha , che la sferoide stia alla sfera circoscrittale come il quadrato dell' asse minore , a quello del maggiore, cioè del diametro della sfera , ossia, come il cerchio dell' asse minore a quello del diametro della sfera ; e però come il cilindro della base quel primo cerchio, e per altezza l' asse maggiore, ch' è il circoscritto alla sferoide , al cilindro di quest' altezza, e per base il cerchio del diametro stesso , ch' è il circoscritto alla sfera ; laonde, permutando, starà la sferoide al cilindro circoscrittole, come la sfera al cilindro quadrato intorno ad essa . E però essendo la sfera due terze parti di questo cilindro, dovrà la sferoide esser pure due terze parti del cilindro ad essa circoscritto .

E nel modo stesso si farà la dimostrazione per l' ellissoide.

## PROPOSIZIONE XXIII.

### TEOREMA.

615. Se il trilineo iperbolico DBR [*fig.* 19.], nell' iperbole parilatera DEB, si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo semiasse principale CR; il conoide iperbolico, che si genera, sarà la differenza del cono retto rettangolo, che tiene per asse l' ascissa CR computata dal centro, e del cilindro, che ha per base il cerchio del semiasse CB, e per altezza la medesima ascissa diminuita di due terzi del detto semiasse.

Dim. Sia CA la surregolatrice della proposta iperbole, e la semiordinata DR la incontri in A. Sarà il quadrato di DR uguale alla differenza de' quadrati di CR, e di CB, o alla differenza de' quadrati di RA, e di RQ, essendo a cagion dell' iperbole parilatera DBR la CB uguale alla BP, o alla RQ, e quindi ancora la CR uguale alla RA. Dunque anche il circolo del raggio DR pareggerà la differenza de' circoli de' raggi RA, RQ. Intanto l' ascissa RB dell' iperbole BED si divida nelle particelle uguali Br, rt . . . , qualunque sia il numero, e la grandezza di esse; e compiti i rettangoli RrdD, RraA . . . , s' intendano questi rivolgersi d' intorno a BR insieme coll' iperbole proposta; saranno i cilindri de' rettangoli RrdD, RraA, RrqQ, come i circoli de' raggi DR, RA, RQ. Dunque il cilindro RraD sarà uguale alla differenza de' cilindri di RraA, e di RrdQ; del pari che il circolo di RD si è qui sopra mostrato pareggiare la differenza de' circoli di RA, e di RQ. E dimostrando il medesimo assunto nelle altre parti dell' ascissa RB, sarà il conoide iperbolico generato dall' iperbole BDR uguale alla differenza del cono tronco, e del cilindro generati rispettivamente dal

trapezio BRAP, e dal rettangolo BRQP rivolti intorno alla BR, cioè al solido annulare, che in tal rivoluzione descrivesi dal triangolo PQA.

Ciò posto, si prenda la BV terza parte del semiasse EC, e la retta VN, che conducesi parallela alla RQ, si prolunghi insin che incontri la QP in N, e poi si faccia rivolgere il rettangolo BVNP intorno a VR. Questo dovrà generare un cilindro eguale al cono di CBP (*10.XII.*); e quindi aggiungendo a questi solidi il cilindro generato dal sottoposto rettangolo BRQP, sarà il cilindro descritto dall' intero rettangolo VRQN uguale al solido, che vien formato dal trapezio CRQP rivolgendosi intorno a CR. Onde saranno uguali le differenze di ciascuno di questi due solidi dal cono descritto dal triangolo isoscele rettangolo CRA, nel rivolgersi intorno al suo cateto CB. Ma la seconda di queste due differenze è uguale al solido annulare generato dal triangolo PQA, nel poc' anzi detto rivolgimento: ed un tal solido si è dimostrato uguale al conoide proposto. Dunque al medesimo conoide dovrà essere uguale la seconda delle dette differenze. — *C. B. D.*

616. Scol. La cubatura del conoide descritto dal trilineo dell' iperbole parilatera, come sta detto nella proposizione precedente, si estende facilmente a quella pel conoide generato dal trilineo corrispondente di qualunque altra iperbole, per mezzo del cor. 3. della prop. IX.

## PROPOSIZIONE XXIV.

### TEOREMA.

617. Se nell' iperbole parilatera NSX [*fig.*20.], rapportata agli assintoti CA, CD, si tiri ovunque l'ordinata NB, e poi lo spazio assintotico infinitamente lungo BXN, cui quella retta è base, intendasi

rivolto intorno all' assintoto CA con perfetta rivoluzione; il solido, che si genera, sarà uguale al cilindro descritto dal rettangolo delle sottoposte coordinate NB, BC.

Dim. Si conducano in una tal curva rapportata all' assintoto CD le due ordinate SR, *sr*, e congiunta la NC si compiano i rettangoli CDNB, RS*tr*, RQ*ur*. Saranno i due anelli cilindrici generati da' rettangoli RS*tr*, RP*pr*, colla mentovata rivoluzione, come le loro altezze SR, PR; imperocchè essi han per comune base l' armilla circolare descritta dalla R*r*. Ma SR sta a PR, o ad ND, come CD a CR, ovvero, pe' triangoli simili CDN, CRQ, come ND a QR. Ed è poi la ND, o la sua uguale PR alla RQ, come il rettangolo RP*pr* all' altro RQ*ur*. Dunque saranno i riferiti anelli cilindrici di RS*tr*, e di RP*pr*, come i rettangoli RP*pr*, RQ*ur*. E quindi, per la proposizione VI. del presente libro e la *F.* Elem.V., il solido assintotico CAXND starà al cilindro generato dal rettangolo BCDN coll' anzidetto rivolgimento, come il rettangolo BCDN al triangolo NCD, cioè come 2 ad 1. E perciò il solido acuto infinitamente lungo, che vien generato dallo spazio assintotico BXN in tal rivolgimento, dovrà essere uguale al sottoposto cilindro, generato dal rettangolo delle coordinate BC, BN. — *C. B. D.*

## PROPOSIZIONE XXV.

### TEOREMA.

618. Il quadrilineo iperbolico esterno MFCA [*fig.* 1.] limitato tra il semiasse primario AC, e la semiordinata MF all' asse secondario si rivolga intorno a questo; il cilindroide che vien generato differirà dal cilindro iscritto in esso, che si genera in

tal rivolgimento dal rettangolo APFC, pel cono che, nel medesimo rivolgimento, si descrive dal triangolo FCD, il quale risulta tirando per F la FD parallela alla BA congiungente del vertice A dell' iperbole coll' estremo B dell' asse secondario.

Dim. L' ascissa CF, che dinota l' altezza di quel cilindroide, si concepisca divisa nelle particelle uguali FE, EG . . . XY, YC, e conducansi per E, Y, prima ed ultima divisione, le E*e*, Y*y* ordinate alla CF, la prima nell' iperbole MAK, e l' altra nel rettangolo PFCA. Ed essendo per la natura di quell' iperbole $MF^2 : CF^2 + CB^2 :: CA^2 : CB^2$, e quindi $:: CD^2 : CF^2$; sarà $MF^2 : CF^2 + CB^2 :: CA^2 + CD^2 : CB^2 + CF^2$ (12.V.). Laonde $MF^2$ risulterà uguale a $CA^2 + CD^2$; e'l cerchio del raggio MF sarà quanto quelli de' raggi CA, CD. Adunque il cilindretto generato da MFE*e*, nel rivolgersi intorno a BC, il quale è un elemento del cilindroide proposto, sarà uguale a' due cilindretti, l' uno descritto da ACY*y* in tal rivolgimento, ch' è un elemento del cilindro che generasi da ACFP, l' altro descritto dal rettangoletto CDZY, ch' è un elemento del cono, che generasi dal triangolo FCD rivolgendosi intorno ad FC.

E praticando il simile apparecchio di poc' anzi per l' altra particelle EG, e la sua corrispondente XY, si dimostrerà parimente, che l' elemento di cilindroide che generasi da EG*ge* sia quanto due cilindri, l' uno descritto da XY*yx*, l' altro da YH*z*X, ch' è un elemento del cono poc' anzi detto. E così continuando per tutte le altre particelle della FC, risulterà in fine il cilindroide descritto da MFCA uguale al cilindro generato da PFCA, ed al cono di FCD, rivolgendosi quel rettangolo, e questo triangolo intorno alla FC. E però quel cilindroide supererà il cilindro suddetto, ch' è l' iscritto in esso, pel cono generato da FCD. — *C. B. D.*

619. Scol. Essendo il cilindro, che ha per base il cerchio

di CA , e per altezza CF uguale al cono della stessa base ; ed altezza 3CF , e quindi uguale a due coni della medesima base , l' un de' quali abbia CF , l' altro 2CF per altezza ; sarà il cilindroide generato da MFCA uguale a' coni di base cerchio di CA altezza 2CF, base medesima altezza CF, e base cerchio di CD altezza la stessa CF . Ma per essersi dimostrato il cerchio di MF uguale a' cerchi di CA , CD , questi due ultimi coni pareggiano il solo di base il cerchio di MF , altezza CF . Laonde :

*Il cilindroide proposto sarà quanto due coni, l' un de' quali abbia per raggio della base l' ordinata estrema all' asse secondario dell'iperbole generatrice del cilindroide, e per altezza l' ascissa corrispondente ; l' altro doppio in altezza abbia per base il cerchio descritto dal semiasse primario.*

## CAPITOLO IV.

### Della rettificazione degli archi parabolici.

### PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

620. Se dal vertice principale A [*fig.*21.] della parabola NAP si prenda un qualunque arco AN, e pel suo estremo N conducansi la normale NR, e la NM semiordinata all' asse AR; il rettangolo del parametro principale AB, e dell'arco AN sarà uguale al rettangolo della detta semiordinata NM nella corrispondente normale NR, una col quadrato della metà di quel parametro moltiplicato pel logaritmo della ragione della semiordinata accresciuta della normale al semiparametro.

Dim. L' asse AR della parabola NAP si prolunghi in sul vertice, finchè la CA sia uguale alla metà del parametro BA; e poi dal centro C, col semiasse AC descrivasi l'iperbole parilatera AE. Sarà la sunnormale MR nella parabola A$n$N uguale alla metà del parametro AB, e con ciò uguale al semiasse AC dell' iperbole parilatera AE, e sarà pure il quadrato di MR uguale a quello di AC. Intanto, per la natura della medesima iperbole, l' è anche il rettangolo FDA uguale a $DE^2$, o ad $MN^2$. Sicchè la somma del rettangolo FDA, e del quadrato di AC, sarà uguale alla somma de' quadrati di MN e di MR, cioè a dire sarà $CD^2$ uguale ad $NR^2$; e quindi CD, o la sua uguale GE pareggerà la normale NR.

# NOTE

ALLE

# SEZIONI CONICHE

# NOTE

## ALLE PRENOZIONI.

*Alla prop.III.(§.10.)*— Nel cono isoscele essendo uguali tutt' i lati, si vede però che qualunque sezione pel vertice sia un triangolo isoscele; mentre nello scaleno risultano isosceli solamente que'triangoli,che hanno per lati quelli uguali del cono a due a due. Or avendo il geometra Sereno *, nel suo libro *de Sectione coni* ( *prop.*VIII.), risoluto, pel cono retto, il problema di *segarlo con un piano pel vertice, sicchè la sezione risultasse un triangolo di data aja*; l' Halley nel riprodurre quel libro col testo a fronte,in fine del suo *Apollonius*,elegantemente impresso in Oxford nel 1710, fu indotto a trattare lo stesso problema nel cono scaleno ( *scol. dopo la prop.* XXXIX.). E come che in tal caso il problema è *solido*, ei recovvi un'analisi algebrica, cui soggiunse la conveniente costruzione col cerchio ed una data parabola, adoperandovi quel metodo, che aveva egli prodotto anni prima, in prolungamento della costruzione Cartesiana.

Tra gli opuscoli di nostra scuola si darà una soluzione geometrica di questo problema, adoperando le stesse curve.

È poi facile rilevare, ch' essendo nel cono scaleno uguali l' un l' altro i triangoli per l'asse, che hanno per basi i diametri similmente inclinati a quello che passa pel piede dell' altezza del cono; debba risultar *minimo* precisamente il triangolo di questa base, cioè *quello per l'asse e per l'altezza*; poichè la sua altezza è sempre il cateto del triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa l' altezza di un qualunque altro triangolo per l' asse. E si comprenderà ancora agevolmente, che sia *massimo* l' altro la cui base è il diametro perpendicolare al primo già detto, da cui ha la massima distanza angolare.

Lasceremo ad esercizio de' giovani il dimostrare, che: *Tutt' i punti ne' quali le altezze de' triangoli per l' asse incontrano la base*

* *Questo geometra del quinto secolo, che, com' è stato già accennato, nella noterella* 13 *alla* Storia delle sezioni coniche,*fu un comentatore di Apollonio, aggiunse a' costui Conici un libro de* Sectione cylindri, *per mostrare, che l' ellisse conica sia d' identica natura alla cilindrica, ed ancora un altro* de sectione coni, *che sarebbe stato più ben detto* do sectione coni per verticem; *poichè egli vi considera solamente i triangoli che per tal sezione derivano, come meglio specificò a quel Ciro, cui diresse un tal libro.*

*del cono sieno allogati nella circonferenza di cerchio , che ha per diametro la retta interposta tra il centro dalla base del cono , e 'l piede della sua altezza* ; la quale verità, riportata da *Sereno* , incontrasi in parecchie istituzioni moderne su i Conici . Come ancora la soluzione del problema di : *Esibire in un cono scaleno quel triangolo per l' asse, che serbi data ragione al minimo di essi* , che dal P.Greg. da S. Vincenzo fu trattata ne' prelegomeni alle sue *Sez. Con.* ( *prop. 9.* ) . Finalmente , per mezzo della *prop.A.El.II* , potranno essi facilmente dimostrare , che : *la somma de' quadrati de' lati , di un qualunque triangolo segato in un cono scaleno, sia sempre la stessa* , e precisamente *quanto il doppio del quadrato del raggio del cerchio base , e dell' altro dell' asse del cono* .

*A' §§. 24 , 25 , e 27.* — Per le denominazioni date a queste curve si tenga presente il §. 9. della *Storia delle Sezioni Coniche* , e la nota corrispondente a piè di pagina.

*Alla prop.VII.* ( §. *30.* ) — Il presente teorema locale escogitato dal Fergola è molto adatto a stabilire una teorica generale delle curve coniche , non solamente per le vie della sintesi ( *Ved.* §. *37.* ) ; ma ancora volendole analiticamente trattare , com' egli stesso l' indicò nel §.17 del suo *Trattato analitico de' luoghi solidi.* Per mezzo del medesimo si può anche ottenere una general definizione , assai più propria , del parametro delle curve coniche , la quale inchiuda ad un tratto il valore di esso , e la sua posizione . E ciò si vede sviluppato nelle proposizioni VI. *parabola* , VII. *ellisse* , ed VIII. *iperbole* , e nelle definizioni che immediatamente le seguono.

*Alla prop. VIII.* ( §.*34.* ) — Nelle precedenti edizioni del presente trattato trovavasi dimostrato separatamente per la parabola , e per l' iperbole , che : *Una retta parallela ad una tangente la curva doveva incontrarla in due punti* . E di questa verità importantissima , per le ricerche a farsi su tali curve, più di una rigorosa dimostrazione se n' era congegnata in nostra scuola. Ma essa discendendo naturalmente dalla genesi per sezione,qui adottata per le curve coniche, abbiamo però stimato conveniente di recarla generalmente in questo luogo,sopprimendo quelle proposizioni,che specialmente la riguardavano nel trattar di ciascuna curva conica. Abbiamo poi enunciata tal proposizione in modo da indicare non solo l' incontro in due punti : ma l' impossibilità d' incontrarle in più di due. Apollonio l' aveva ancora dimostrata generalmente , ma non già nel nostro modo ( *Ved.prop.19. lib. I.*Conicorum).

Non meno importanti del teorema sono poi le verità , che ne sono state dedotte ne' corollari ( §§.35 e 36 ).

## A' PRIMI TRE LIBRI.

*Al* §. *40.* — Questa semplicissima, e natural definizione della tangente una curva conica, è desunta da quella che diede Euclide pel cerchio.

*Alla prop. VI. parab.* (§.*52.*), *VII. ell.* (§.*132.*), *ed VIII. iperb.* (§.*216.*). — Si vegga la noterella alla prop. VIII. *Prenozioni*.

*A'* §§.*70*, *e 72.* (*Def. V. e cor. 2.*) — La definizione generale quì data dalla *proporzione armonica*, o *medietà armonica*, come la dissero gli antichi (*Ved. Pappo lib. III.* Collect.). denominandola dal termine medio, che ne costituiva la specialità, per la maniera di compararlo a' due estremi, trasmutasi, per le rette, nell' altra del §. 72 più usata da' moderni. Ed è evidente, che per questa risultino assegnati in una retta definita, oltre i suoi estremi, due punti medii; e che essendo massimo il primo termine della proporzione armonica per essa, poichè è la stessa retta, debba risultar minimo il quarto termine, cioè la porzione di retta interposta tra' due punti medii (25. *El. V.*).

Or di tali quattro punti, considerandone, come occorre, due frammezzati da un terzo, e però, cominciando da un estremo della retta, o questo e 'l secondo de' punti medii, o pure il primo di tali punti e l' altro estremo di quella, li abbiamo detti *alterni*; poichè tal denominazione ci sembra più propria dell' altra di *conjugati*, trovandosi tal voce già adoperata in altro significato presso de' geometri: ed *alterne* anche abbiamo dette le *armonicali* (§.75.) prese nello stesso ordine, cioè la prima con la terza, e la seconda con la quarta.

*Al lemma* (§. *76.*) — La verità quì esposta fu dal nostro Borelli dimostrata nella prop. 3. de' suoi *Apollonii Conica compendiaria*, e dal de la Hire nel lib. I, delle sue elaboratissime *Sectiones conicae* (*pr. 15.*), il qual libro principalmente riguarda la sezione armonica di una retta, e le proprietà delle rette armonicali; su di che egli, seguendo il suo compatriotta Pascal, fondò le dimostrazioni di molti teoremi della dottrina de' *Conici*. E pare che l' altro pur suo compatriotta Carnot riproducendola, dopo ben più di un secolo, non avesse avuto affatto presente quel dotto trattato, che certamente non ne avrebbe data una dimostrazione implicata di espressioni trigonometriche (*Essai sur la théorie des transversales*, *pr. 7.*).

Ma se il nostro gentil secolo non disprezzasse tanto le opere degli antichi, senza leggerle (anche perchè poco si bada ad apprendere le lingue in cui furono scritte, e tradotte), si avrebbe ben potuto rilevare una più che compiuta teorica della *proporzione armonica*, e de' *punti*, e *delle rette armonicali* dal lib. VII. delle *Collect. Math.* di Pappo, ne' lemmi a' *Porismi* Euclidei. Ed il caso più importante di tal lemma, si aveva anche espressamente nella prop. 33. del libro de *Sectione cylindri* di Sereno.

*Al* §. 77. (*cor.* 1.) — La verità qui enunciata somministra un' elegantissima costruzione per esibir generalmente qualunque delle rette armonicali date le altre tre; o il quarto punto di proporzione armonica in una retta, nella quale fossero assegnati i tre altri: giacchè è nota la stretta corrispondenza tra l' esibizione delle armonicali, e la divisione armonica di una retta. Ed eccola nel seguente

PROBLEMA.

*Date le tre rette AB, AE, AC concorrenti in un punto* [*fig. 1.*], *esibire la quarta armonicale.*

SOL. Tirisi a qualunque di esse, come AB, una parallela indefinita RS, che seghi le altre due ne' punti M, N. Ciò posto, se la quarta armonicale cercata sia l' alterna alla AB, nel qual caso dovrà cadere tra le AE, AC, essa dovrà passare pel punto P, medio della MN. E volendola alterna alla AE, basterà prendere la N*m* uguale alla NM; sarà A*m*F la quarta armonicale cercata. Volendola, in fine, alterna alla AC, e però tra le AB, AE, si prenderà la M*n* uguale alla MN; e la congiunta A*n* sarà la retta richiesta.

SCOL. Non ostante la grande eleganza della general costruzione del precedente problema, non dobbiamo tralasciare l' altra già conosciuta, che avevanvi recata il P. Gregorio da S. Vincenzo (*Quadr. circuli*), lo Schooten (*De constr. probl. geometr.*), e 'l de la Hire (*Sectiones conicae*), per la quale ci conviene premettere il seguente

TEOREMA.

*Se i lati opposti del quadrilatero ABCD* [*fig. 2.*] *concorrano prodotti in E, F, congiunta la EF, e tirate le diagonali AC, BD fino ad incontrarsi con la EF; i quattro punti, che risulteranno segnati in ciascuna delle EF, AC, BD prolungate, saranno armonici: cioè la AH*

*sarà divisa armonicamente in G, C, la BD in G, K, e la FE in H, K.*

Dim. Si tiri per C la LMCN parallela alla AE; dovrà stare

AE : ED :: CL : CM

ed ED : AD :: CN : CL

quindi AE : AD :: CN : CM

e permutando AE : CN :: AD : CM

Ma pe' triangoli simili AEH, CNH sta

AE : CN :: AH : HC

e per gli altri ADG, CGM sta

AD : CM :: AG : GC

starà perciò AH ; HC :: AG : GC

E con la stessa dimostrazione si proverà, che nel quadrilatero DEFB i cui lati opposti sono convenuti in A, K, congiunta la AK, debba la diagonale FD risultare armonicamente divisa in C, P.

Adunque nelle quattro rette armonicali AK, AD, AG, AB cadendo le altre KDGB, KEHF; dovranno lo diagonali BD, EF rimanere armonicamente divise l'una in K, G, l'altra in K, H. — *C. B. D.*

## *Aliter.*

Ma di tal verità eccone un' altra non meno elegante dimostrazione, fondata su di una nuova proprietà del triangolo rilevatavi dal professor Flauti, nella sua *Geometria di sito*, cioè:

*Se su i lati del triangolo ABC [fig. 3.] conducasi comunque la trasversale DEF, dovrà stare*

AC : CE :: (AB : BF) (FD : DE)

Imperocchè tirata da F la FG parallela alla AC, si ha

AC : FG :: AB : BF

FG : EC :: FD : DE

e quindi AC : CE :: (AB : BF) (FD : DE).

Ciò posto, venendo al nostro caso del quadrilatero completo ABCDEF [*fig. 2.*], e prendendovi a considerare la diagonale AC si ha, che i lati del triangolo AEH essendo segati dalla trasversale FCD in F, C, D, dovrà stare AH : HC :: (AE : ED) (DF : FC)

Inoltre essendo i lati dell' altro triangolo ADG tagliati dalla traversale ECB in E, C, B si ha

AG : GC :: (AD : ED) (EB : BC)

E la stessa ECB incontrando ne' medesimi tre punti i lati del triangolo AFD, si ha ancora

EB : BC :: ( AE : AD ) ( DF : FC )

Che perciò, sostituendo queste componenti la ragione di EB : EC nella precedente ragion composta, si vedrà in fine risultare

AH : HC :: AG : GC

Ond' è che la AC è divisa armonicamente in G, H.

E poichè i quattro punti A, G, C, H sono armonicali, lo saranno ancora le quattro rette FH, FC, FG, FA, le quali perciò divideranno armonicamente l' altra diagonale BD in G, K; od in conseguenza anche la FE sarà divisa armonicamente in H, K.

Scol. 1. Il Carnot avendo dato alla figura ECFA, che risulta dal quadrilatero ABCD, con la costruzione indicata nel teorema, il nome di *quadrilatero completo*, ed alla congiunta EF ancor quello di diagonale, come per le AC, DB, e queste denominazioni trovandosi da' geometri moderni adottate; si potrà quindi il precedente teorema enunciare alla sua maniera nel seguente modo:

*In ogni quadrilatero completo, ciascuna delle tre diagonali rimane armonicamente divisa dalle altre due, e da' vertici degli angoli, ch' essa congiugne.*

Scol. 2. Or ecco come dal precedente teorema rilevasi immediatamente la quarta armonicale.

Sieno AB, AC, AD [*fig.4.*] le tre rette date, o si cerchi per esempio la quarta armonicale alterna ad AC. Preso su questa un punto ad arbitrio C, ed inclinate anche ad arbitrio per esso tra le altre due le rette BE, FD, che formeranno con esse il quadrilatero completo ABCDEF, vi si tirino le diagonali BD, FE, producendole fino ad incontrarsi in K; sarà AK, com' è ben chiaro, la retta richiesta.

E potrà, se piaccia seguirsi anche tal mezzo per la ricerca del quarto punto armonico.

Scol. 3. Ma il quarto punto di armonica divisione può ottenersi con la semplice ricerca di un quarto proporzionale in ordine a tre rette date: Di fatti, dovendo essere [ *fig.5.* ] BC : CE :: BD : DE, si avrà componendo BC + CE : CE :: BE : ED; e si farà noto il punto D, quando sieno dati gli altri B, C, E. O pure dividendo BE : EC :: BD — DE : DE; e si farà noto il punto C, quando sien dati gli altri B, D, E.

Trovandoci qui, per incidenza, a trattare della proporzione armonica, e di essa applicata al *quadrilatero completo*, non sarà fuori proposito recare i seguenti altri teoremi, per l' uso che occorrerà farne altrove.

Faremo però prima osservare, che esso può considerarsi risultare da quattro rette comunque situate, che ne sono i quattro lati; ed i sei vertici sono i sei punti, in cui le quattro rette possono, generalmente, intersegarsi a due a due. Noteremo inoltre, che da' quattro lati di un quadrilatero completo, presi a tre a tre, si hanno quattro triangoli, tra' quali vi ha relazioni estremamente rimarchevoli. Del che altrove.

TEOREMA.

*In un quadrilatero completo ABCDEF* [*fig.6.*], *i punti medii X, Y, Z delle tre diagonali AC, BD, EF sono in linea retta.*

DIM. Da' punti medii *e*, *b*, *a* de' lati di uno de' quattro triangoli determinati da' quattro lati del quadrilatero, come EBA, si formi l'altro triangolo *e b a*; è chiaro che i lati di questo triangolo passeranno pe' punti medii delle diagonali. Ciò posto, poichè i lati del triangolo EBA son segati in D, C, F dalla DF, starà (*V. l'* Aliter *a pag.*VII.)

$$AD : DE :: (BC : CE)(AF : FB).$$

Ma per le parallele AE, *ae* sta

$$AD : DE :: eY : Ya$$

e per le altre BE, *be* sta pure

$$BC : CE :: eX : Xb, \text{ e di più } AF : FB :: bZ : Za$$

sarà dunque $\quad eY : Ya :: (eX : Xb)(bZ : Za)$

ond' è che i tre punti X, Y, Z staranno per dritto.

*Alle prop. XIV. par.* §.79, *XX, ell.* §. 172, *e XXXI. iperb.* §293— Che si paragoni la dimostrazione comune a queste proposizioni, ottenuta per mezzo del lemma stabilito precedentemente (§.76.), con quella che ne fu data nelle precedenti edizioni, e si rileverà subito la fecondità del principio recato in quel lemma.

*Al cor. 3.* (§.82.) — Sebbene bastasse a dimostrare la verità, che vuole stabilirsi in questo corollario, il modo con cui nel principio di esso vi si perviene; pure a renderla anche indipendente da questo, onde non veggasi la necessità di ricorrere alla supposizione, che la tangente di una curva conica sia la segante di essa, che abbia riuniti insieme i due punti d' intersezione, vi si è soggiunta la dimostrazione indiretta; mentre noi miriamo ad insinuare in modo positivo nell' animo de' giovani tutte quelle nozioni essenziali, le quali hanno però dell' astratto, e del metafisico.

*Alla prop. XV. parab.* (§§. 83. a 90.) — ed alle analoghe per l'ellisse, e l'iperbole (§§. 173 o 294.).

1. La proprietà delle curve coniche sviluppata in questa proposizione è il fondamento della teorica, così detta da' moderni, de' *poli*, delle *polari*, e delle polari *reciproche*. Per l'appropriazione di queste nuove denominazioni, molti recenti geometri (e ci è lecito conchiuderlo sia dalle loro opere, sia dagli *Annali di matematica* pubblicati dal Gergonne) ignari forse delle opere degli antichi, e di altri geometri a noi più vicini, hanno creduto, che si trattasse di una novella dottrina; mentre essa ben contenevasi in queste. L'è vero che la medesima per qualche tempo rimase quasi dimenticata; ma pure ben si vide riprodotta dal Fergola. nè sappiamo persuaderci, che fossero rimasti ignorati i moltiplici lavori, o le applicazioni fattene da' suoi allievi, ed in nostra scuola; di che attesta la piccola parte di *opuscoli*, che venne pubblicata nel 1810; e più di tutto il mostrano le varie carte, che tuttavia rimangono presso noi de' Mss. del Fergola. Ed è bene notare, che questo nostro benemerito, ed illustre concittadino ebbe scuola attivissima fin dal 1770, che poi chiuse nel 1800. Che però sia di tutto ciò, sembrandoci conveniente di uniformar l'antico al novello linguaggio, ormai generalizzato, a fine di porre i giovani nel caso di ben intendere i lavori de' moderni geometri, consacreremo qui qualche pagina a sviluppar brevemente, ed enunciar loro talune delle più interessanti proposizioni intorno a' *poli*, ed alle *polari*, o talune delle moltiplici proprietà, cui esse dan luogo pe' quadrilateri iscritti, e circoscritti alle sezioni coniche.

2. Applicando adunque la definizione del *polo*, e della *polare* alla enunciazione della proposizione XV, si ha, che:

I. *I poli di tutte le rette, che passano per uno stesso punto, comunque situato a riguardo di una sezione conica qualunque, sono tutti sopra una stessa retta, polare di quel punto.*

Osservando poi che ad ogni retta dee corrispondere un punto per *polo*, si ha *inversamente*, che:

II. *Le polari di ogni punto di una stessa retta a riguardo di una sezione conica qualunque, intersegansi tutte in un medesimo punto, il quale è polo della retta.*

Poichè la polare di un punto è conjugata alla direzione del diametro sul quale trovasi il punto (vale a dire parallela alle sue ordinate), e passa per l'estremo *interno*, o *esterno* della sottangente corrispondente a questo punto, secondo che, per l'opposto, il punto sia *esterno*, o *interno* alla curva (87.), è chiaro che nel primo caso, cioè quando il punto è fuori, la sua polare debba intersegar la curva; e nel secondo

caderne invece tutta al di fuori, senza poterla affatto incontrare.

3. Dalla definizione, e dalla costruzione della polare in conseguenza del polo si ha inoltre, che:

III. *Il vertice di un angolo qualunque circoscritto ad una sezione conica, è il polo della retta indefinita, che passa pe' contatti*, oppure *è questa la polare di quello.*

E che

IV. *Il punto medio di una corda qualunque è il polo della parallela tiratale dal vertice dell' angolo, i cui lati toccano la curva, negli estremi della corda.*

4. Come corollari de' num. I, e II possono ancor notarsi le due seguenti proposizioni:

V. *La congiungente due punti qualunque è la polare del punto d' incontro delle polari de' punti medesimi.*

VI. *L' intersezione di due rette qualunque è il polo della congiungente i poli delle rette stesse.*

5. Dalla costruzione della polare si rileva altronde, che:

VII. *Le polari di punti situati sopra uno stesso diametro sono tutte parallele tra loro, e conjugate alla direzione di questo diametro*: val quanto dire parallele alle sue ordinate. E che:

VIII. *I poli di rette parallele si trovino sul diametro conjugato alla direzione di quelle rette.*

6. Se il punto dato per polo corrispondesse al centro della sezione conica, è chiaro che la sua polare diviene allora inassegnabile, o per dir meglio impossibile; mentre le tangenti condotte per gli estremi di tutte le corde, ossia diametri, che passano per esso, essendo parallele, non possono convenire in alcun punto. Or questa impossibilità ha fatto dire, che la polare del centro di una sezione conica cada a distanza infinita, ed in situazione indeterminata; la qual cosa abbiamo creduto notare, affinchè i giovani intendano il senso preciso di questa espressione, che troveranno sovente usata. E così pure suol dirsi, che il polo di un diametro cada a distanza infinita sul suo conjugato, appunto per l' impossibilità di assegnarlo.

Se poi il punto si trovasse sul perimetro della curva, è chiaro che la sua polare si riduca alla tangente nel punto stesso; o viceversa, che il polo di una tangente sia lo stesso punto di contatto.

7. Una delle proprietà più interessanti del polo, e della polare si ha nella seguente proposizione, già enunciata nel §. 89. cioè, che:

IX. *Tutte le seganti di una sezione conica, che passano per uno stesso punto, rimangono armonicamente divise dalla curva, dal punto, e dalla sua polare.*

8. Nel seguente §. 90 è dichiarata una proprietà notabilissima, di cui son dotati i quadrilateri iscritti nelle sezioni coniche; val quanto dire [ *fig*.7. ], che i tre punti P, S, R, che risultano dall' incontro delle diagonali AC, BD, e da quelli de' lati opposti AB, CD; od AD, BE sono tali, che ciascun di essi è il polo della retta la quale unisce gli altri due. Ora per maggior chiarezza, e semplicità comprendendo pe' *quadrilateri iscritti*, sotto la denominazione di corde, tanto i lati, che le diagonali ( *Veg. il* §. 366. ) la proposizione di cui trattasi può più comodamante enunciarsi nel modo seguente:

X. *I tre punti d' incontri delle tre coppie di corde opposte di un quadrilatero iscritto in una sezione conica sono tali, che ciascun di essi è il polo della congiungente gli altri due.*

9. Questa interessantissima proprietà de' quadrilateri iscritti nel le sezioni coniche, che ha formato, o forma la base delle principali ricerche de' moderni geometri su tali curve, è dovuta al prof. Scorza, non ha guari tolto alla Geometria, ed alla nostra scuola. Benvero ei la rilevò la prima volta nel cerchio, all' occasione dell' elegante soluzione da lui data del problema d' *iscrivere in un cerchio un triangolo, i cui lati passar dovessero per tre punti dati*, pubblicata nel 1810 tra gli *opuscoli matematici della scuola del Fergola*, nella quale la cennata proprietà è implicitamente compresa. Ma chi non sa, che le proprietà del cerchio, ove non occorrano relazioni angolari, si generalizzino per tutte le sezioni coniche? E di questa proprietà è poi conseguenza immediata, ed evidente l' altra, che relativamente a' quadrilateri circoscritti verrà più appresso enunciata ( n.XV ); e che è altrettanto importante quanto la prima.

10. Or ne' vertici A, B, C, D di un quadrilatero iscritto in una curva conica si conducano le tangenti, e si producano fino a riunirsi a due a due ne' sei punti *e*, *f*, *g*, *h*, *m*, *n*. Risulterà per tal modo il quadrilatero completo *efghmn* circoscritto alla stessa sezione conica; e per effetto della costruzione è chiaro, che ognuno de' sei vertici di questo nuovo quadrilatero sia (*n*. III.) il polo di una corda appartenente al quadrilatero iscritto; cioè a dire sarà il punto *e* il polo di AD, il punto *f* di AB, *g* di BC, *h* di CD, *m* di BD, ed *n* di AC. Posto ciò i poli di due corde opposte qualunque del quadrilatero iscritto, come di AB, CD, si uniscano colla retta *fh*; sarà questa retta la polare del punto S (*n*.V.), intersezione di quelle corde: ma è pure PR polare dello stesso punto S ( *n*. X. ); dunque le due rette *hf*, PR staranno per dritto. E da ciò segue, che stiano per dritto i quattro punti *h*, *f*, P, R, vale a dire, i poli *h*, *f* di due corde opposte DC, AB, e le intersezioni P, R delle rimanenti due coppie di corde opposte. Nel modo stesso

si conchiuderà, che stieno per dritto i quattro punti $e$, P, $g$, S, cioè i poli $e$, $g$ delle corde opposte AD, BC, e le intersezioni P, S delle altre due coppie di corde opposte. E finalmente che ancora in una retta si trovino i quattro punti $m$, R, $n$, S corrispondenti a' poli $m$, $n$ delle corde opposte BD, AC, ed a' punti d' incontro R, S delle altre due coppie di corde opposte. Quindi ne risulterà la proposizione seguente

XI. *In un quadrilatero iscritto ( completato con tutte le sei corde ), i poli di due corde opposte qualunque, e le due intersezioni delle rimanenti due coppie di corde opposte sono sempre in linea retta.*

11. Si osservi ora, che le tre rette $eg$, $fh$, $mn$ sono precisamente le tre diagonali del quadrilatero completo circoscritto $efghmn$; e che perciò, per la proprietà di questa figura più innanzi dimostrata ( *nota al* §.77. ), la $eg$ sarà divisa armonicamente dalle altre due ne' punti P, $S$; la $hf$ lo sarà ne' punti P, R; e la $mn$ lo sarà ne' punti R, S. Quindi si ha l' altra proposizione.

XII. *La retta che passa pe' poli di due corde opposte qualunque di un quadrilatero iscritto, e per le intersezioni delle altre due coppie di corde opposte, rimane in questi quattro punti armonicamente divisa. E questa retta è inoltre la polare del punto in cui s' incontrano quelle due prime corde opposte.*

12. E da questa risulta evidentemente, che:

XIII. *Se due corde opposte qualunque di un quadrilatero variabile iscritto in una sezione conica convengano costantemente in un punto fisso, le due intersezioni delle altre due coppie di corde opposte si troveranno sopra una retta fissa, polare di quel punto.*

13. Notiamo ancora, che le tre diagonali $eg$, $fh$, $mn$ del quadrilatero completo circoscritto si tagliano a due a due, formando il triangolo PRS, negli stessi tre punti P, R, S risultanti dalle intersezioni delle tre coppie delle corde opposte del corrispondente quadrilatero iscritto. Quindi:

XIV. *Due diagonali qualunque di un quadrilatero completo circoscritto ad una sezione conica, s' intersegano in un medesimo punto con quelle due corde opposte del corrispondente quadrilatero iscritto, pe' poli de' quali passa la terza diagonale.*

E questa proposizione è assai più generale di quella, che suol essere così enunciata:

*Le diagonali di un quadrilatero iscritto s' intersegano in un medesimo punto colle diagonali del corrispondente quadrilatero circoscritto.*

Mentre in questo modo non si tien conto che del solo punto P, nè sarebbe la proposizione applicabile agli altri due punti R, S, cui conviene identicamente.

14. Finalmente poichè i tre punti P, R, S, che relativamente al quadri-

latero iscritto risultano dalle intersezioni delle sue tre coppie di corde opposte, hanno la proprietà di esser tali, che ciascuno è il polo della retta, che contiene gli altri due; e gli stessi tre punti, relativamente a quadrilatero circoscritto, risultano ancora dagl'incontri a due a due delle suo tre diagonali; però si ha la proposizione seguente, ch'è perfettamente la reciproca di quella riportata al n. X.

XV. *In ogni quadrilatero completo circoscritto ad una sezione conica, il triangolo, che risulta dagl' incontri delle sue tre diagonali, a due a due, è tale, che ciascun de' suoi vertici è il polo del lato opposto ad esso.*

15. Da questa proposizione, e dalla costruzione della polare, dato il polo, risulta, che i diametri i quali passano pe'vertici P, R, S del triangolo PRS, or ora considerato, sien tali, che ciascuno è conjugato alla direzione del lato, che [gli è opposto. In conseguenza se la sezione conica, alla quale il quadrilatero completo è circoscritto, sia un cerchio, allora ciascun di que' diametri sarà perpendicolare al lato opposto al vertice, pel quale è condotto; o, in altri termini, le loro direzioni si confondono con quelle delle tre altezze del triangolo. Ond'è che si ha il seguente teorema.

*Circoscritto ad un circolo un quadrilatero completo, è formato il triangolo dalle tre diagonali; il punto d' intersezione comune delle tre altezze del triangolo coincide col centro del circolo.*

Ed esso, ch'è l'un di quelli proposti senza dimostrazione (chè dovè giudicarla ben difficile) dall' illustre geometra Steiner, professore in Berlino, in un opuscolo stampato in Roma in questo anno, mentre ivi stava, del quale distribuì vari esemplari in Napoli, nella breve dimora che vi fece, vedesi ora derivato nel modo il più evidente ed immediato dalla precedente proposizione XV.

16. Finora si è supposto che il quadrilatero iscritto, o circoscritto fosse qualunque: che se l' iscritto abbia due corde opposte parallele [*fig.* 8.] come le AB, CD; le proposizioni precedenti risultano nel seguente modo modificate dal parallelismo de' due lati. Compiuta la figura come nel caso generale, ne avverrà, che le diagonali *mn*, *eg* del quadrilatero circoscritto, dovendo concorrere in un medesimo punto S con le due corde opposte AB, CD dell' iscritto (*n.*XIV.); poichè queste, per ipotesi, sono parallele, così alle stesse risulteranno ancor parallele quelle due diagonali *m n*, *e g*. Or si osservi, che la terza diagonale *fh* congiungendo i poli *f*, *h* delle corde parallele AB, DC, dev'essere un diametro della sezione conica (n. VIII.), e come tale deve passare pe' loro punti medii H ad L; ond' è che passerà ancora pe' punti medii P, R delle altre due diagonali *eg*, *mn*. Adunque queste due diagonali, che nel caso generale son divise dalla terza armonicamente, in questo caso particola-

re risultano biseccate. E ciò rilevavasi ancora da che essendo attualmente impossibile il loro concorso in un punto S ; il punto R , che dovrebbe essere il quarto armonico, dopo quel punto, e gli estremi *m*, *n* della *mn* , deve necessariamento cadere nel punto medio R di questa retta : e per la stessa ragione il punto P dovrà trovarsi nel mezzo della *eg*, come si è direttamente dimostrato. Quindi è, che delle tre diagonali del quadrilatero circoscritto la sola *fh*, ch' è diametro della sezione conica , rimane dalle altre due armonicamente divisa ne' punti P, R.

17-Dopo ciò possiamo enunciare le seguenti proposizioni.

XVI.*Se un quadrilatero iscritto in una sezione conica abbia due corde opposte parallele ; la congiungente i poli di due delle corde opposte convergenti , mentre passa pel punto d' incontro delle rimanenti , vi rimane bisecata .*

XVII.*La retta , che congiunge i poli di due corde opposte parallele, appartenenti ad un quadrilatero iscritto in una seziona conica , mentre passa per le intersezioni delle rimanenti due coppie di corde opposte , ove rimane armonicamente divisa , è un diametro della curva .*

XVIII. *Se una delle tre diagonali di un quadrilatero completo circoscritto ad una sezione conica sia diametro della curva ; le altre due diagonali ne rimarranno bisecate , saranno parallele tra loro, e saranno di più conjugate alla direzione di quel diametro* : val quanto dire parallele alle sue ordinate.

18, E ciò crediamo più che bastante per lo scopo prefissoci . Ma non tralasceremo in appresso di far osservare la fecondità di siffatti principii nella soluzione di difficili problemi , o nel dimostrar teoremi , che si presentano assai ardui a chi non sia di tali teoriche fornito ; come tra gli altri sono quelli dall' egregio geometra Steiner lasciati senza dimostrazione , nell' opuscolo di sopra citato. E dobbiamo credere, che per tal ragione nessuno tra noi , cui lo Steiner donando il suo opuscolo, invitava ad occuparsene, abbia potuto riescire a dimostrarli.

*Al cor.(§.84).* — L' importanza della verità dimostrata nella proposizione precedente ci ha indotti a dichiarare in questo corollario qual sia in ciascun de' due casi la retta data di posizione , della quale in quella si accenna, e nella dimostrazione di ciascun caso si viene ad assegnare.

*Alla prop. XVI par.(§. 91 )* — Di questa nuova proprietà della parabola , rilevatavi dal nostro Trudi , e che identicamente si estende alle altre curve coniche , se ne vedrà subito l' utilità nel corollario , e nella proposizione seguente , importantissima per l' uso della parabola nella

composizione de' problemi solidi; od abbiam creduto non doverla omettere in un trattato delle curve coniche.

*Alla prop.XVII., ed al cor.(§§.93. 94.)* — Il problema che si rileva in tal proposizione, per mezzo del teorema precedentemente stabilito, è generale, e non già limitato ad ottenere il solo asse da un diametro dato della parabola. E nel corollario vi si è poi mostrato il modo facile come rimaneva modificata la costruzione nel caso più ovvio, per la costruzione de' problemi solidi, ove si ricerchi l'asse; pel qual caso nelle precedenti edizioni, v' era stato bisogno di ripeterlo dalla teorica de' fuochi, costituendone una proposizione nel capitolo di questi.

*Alle def.IX e X.lib.I. (§§.96 e 97).* — Queste due definizioni erano state le altre volte riunite in una sola: ma riguardando esse due diversi oggetti, abbiamo creduto più conveniente separarle.

*A' cor. (§§. 98 e 99.).* — Dalle precedenti definizioni abbiamo facilmente dedotti per corollari due verità necessarie ad esser rilevate.

*Alla prop.XVIII.par., XXV. ell.,XXXVII.iperb.* — Questa proprietà importante delle curve coniche, che ora vi abbiamo fatta avvertire, ci ha somministrato il modo di dimostrar facilmente molte altre proprietà di esse, delle quali già una è quella, che vedesi nel §.103 *par.*, §. 187 *ell.*, §. 305 *iperb.*, e che nelle precedenti edizioni si vedeva costituire una proposizione speciale, la cui dimostrazione certamente è meno elegante dell'attuale.

*Alla prop.XIX. par. (§.90.)* — La dimostrazione di ora è più semplice di quella, che altra volta vi era stata recata.

*Alla prop. XX. par. §.107, XXVIII.ell.§.195, XL. iperb. §. 315.* La dimostrazione uniforme di queste proposizioni è stata ora resa semplicissima, e pressochè intuitiva. Intanto deo notarsi che questa proprietà ovviissima delle curve coniche, la quale qui vedesi con facilità dimostrata geometricamente, e nel *Trattato analitico delle Sezioni Coniche* (§§.949, 163. 307.) il fu del pari per le vie geometrico-analitiche, apparve rilevata con l'analisi pura, da principii più alti, e con più lungo sviluppo, per opera dell'analista francese sig. Pages, nel *Jounal de Mathematiques*, che pubblicasi in Parigi dal Liouville (*nov. 1837.*), che forse la giudicò nuova, enunciata nel seguente modo: *Se per un punto qualunque di una sezione conica si tirino i raggi vet-*

*tori, e la normale terminata all' asse de' fuochi: la projezione di questa normale su ciascuno de' raggi vettori è sempre quanto il semiparametro dell' asse suddetto.*

*Allo scol. della prop. IV. lib. II. (§§. 123 e 126..), ed alla prop. V.* Ciò che è stato questa volta notato in tal scolio l' era importante a rendere più uniforme e generale la dimostrazione del seguente teorema, che nelle precedenti edizioni risultava ben lunga, per la distinzione in tre casi, a ciascun de' quali corrispondeva una special dimostrazione.

*Allo scol. della prop. V. lib. II. (§. 130.)* — La stessa costruzione qui indicata per l' ellisse avrà luogo per l' iperbole: ma dee osservarsi, che, mentre per la prima curva il problema è sempre possibile, nella seconda può divenire impossibile, quando la corda condotta pel vertice del lato trasverso, e che comprende con esso l' angolo dato, anzichè incontrare la stessa iperbole, incontri invece la sezione opposta; poichè allora la retta, che dal centro si tira pel punto medio di questa corda, sarà un diametro secondario, e quindi non potendo più incontrar la curva, più non esisterà il punto di contatto.

La stessa costruzione si applica al caso della parabola; per la quale la direzione de' diametri è sempre la stessa.

Conviene anche avvertire, che nella costruzione esposta si suppone la curva effettivamente descritta, come il richiedea il luogo nel quale è recata. Ma quando si dieno solamente i suoi determinanti, come a dire un diametro di sito e di grandezza, e 'l suo conjugato, ovvero il parametro coll' angolo delle coordinate, la soluzione del problema risulterà dalla seguente analisi geometrica.

Suppongasi esser Q [*fig. 9.*] il punto cercato del contatto, e quindi QS la tangente, QM la semiordinata corrispondente al dato diametro A*a*. Sarà dato di specie il triangolo SMQ, e quindi la ragione di SM² ad MQ², che può porsi uguale a quella di *a*K, posta per dritto col diametro A*a*, al parametro *a*T. E poichè sta MQ² ad AM*a*, o al suo uguale SMC (119.), come *a*T ad A*a*; sarà, *ex aequo*, SM² : SMC, ovvero SM : MC :: *a*K : *a*A; e componendo SC : CM :: AK : A*a*; e quindi AC a CM in suddupllcata ragione di AK : A*a*. Dunque sarà data l' ascissa CM, ed in conseguenza la posizione della semiordinata QM, di cui si ha facilmente anche la grandezza.

Ed è questa la soluzione, che rinvenivasi di tal problema nelle precedenti edizioni del presente trattato.

*Alla prop. VI. lib. II. ( §.131. )* — Ancor questa dimostrazione procede con maggior semplicità, che nelle precedenti edizioni.

*A' cor. della prop. XII. lib. II. ( §§. 149 a 152. ).* — La verità che enunciasi nel cor.1. meritava di essere con ispecialità rilevata, per poterla più chiaramente adoperare al bisogno; e'l luogo più proprio per ciò fare era questo, mentre nelle altre edizioni veniva dedotta per primo corollario dalla proposizione seguente. Quindi il cor. 2 di ora corrisponde agli 1 e 2 delle precedenti edizioni; ed i cor. 4 e 5 di queste al quarto della presente.

*Alle prop. XIV. lib. II., e XXVI. lib. III. ( §§.116, e 282. )* — In questo problema, per l' ellisse, e l' iperbole, si è solamente cercato ottenere la grandezza degli assi di tali curve da quella data di due semidiametri conjugati in dato angolo. Ma per la composizione de' problemi solidi si esige ancora, che fosse dalla posizione di quelli determinata la posizione di questi. Il che però si ottiene facilmente ottenutane la grandezza. Poichè descritta con essi l' ellisse, o l' iperbole corrispondente, non dovrà farsi altro, che adattarvi que' semidiametri conjugati; da che gli angoli in cui inclinansi i medesimi agli assi risulteranno dati.

L' accoppiar questa ricerca all' altra, ne avrebbe resa men semplice la soluzione. Non così nella parabola, per la quale nella prop. 17. lib. I. si vede ad un tempo soddisfatto all' uno, e l' altro oggetto. Ma nel lib. IV. abbiamo anche data una soluzione diretta del problema, in cui si richiedesse ad un tempo la grandezza degli assi, e la loro posizione.

*Alla prop. XV. lib.II. (§.160 )* — Questa proposizione, che, per uniformare il presente trattato geometrico delle curve coniche a quello analitico, fu nelle precedenti due edizioni recata in un'*Addizione*, questa volta è stata inserita nel testo, nel luogo che l' era proprio.

*Dopo le prop.XXI. lib.II., e XXXII. lib.III. (§§.175, e 294)* — Usando della definizione data nel §. 86 sarà facile l' estendere analogamente all' ellisse ciò che, dal §.87 al 90, fu detto per la parabola. (*Veg. anche la nota alla prop.15.par.*)

*Alla prop.XXII.lib.II, e XXXIII.lib.III. (§§.174, e 295.)*— La dimostrazione della prima parte di questa proposizione è più semplice di quella le altre volte recatavi. In quanto poi alla parte II. essa vi fu aggiunta dal Fergola nelle sue *Sezioni coniche analitiche* ( §§. 129, e

291.); e noi nelle due precedenti edizioni di queste geometriche l' avevamo recata nell' *Addizine*, convenévolmente dimostrandola: d' onde è stata ora ridotta nel testo.

E merita esser qui notato, che una tal verità fù ignota a' geometri antichi, ed ancora a' moderni, prima chè l' illustre Lagrange non la rilevasse col suo metodo delle *Variazioni*, o con quello con cui vuol rinvenirsi una curva, che sia adorna di una data *proprietà di massimo*, o *di minimo* in ciascun punto ( *Fonctions analytiques* §. 168.). Ed il Lacroix, imprendendola ancor esso a trattare, vi si diresse col metodo de' *massimi* e *minimi* delle funzioni differenziali ( *Calcul integral* §. 842 *prima ediz*, ). Aggiungasi ch'essi limitaronla al solo caso delle tangenti perpendicolari sugli estremi del diametro, cioe per l' asse; mentre qui vedesi enunciata e dimostrata generalmente per qualunque diametro. Ed il Fergola cui dobbiamo sì elegante general dimostrazione, in forma geometrica elegantissima, volle anche mostrare, come in quel caso particolare su indicato potesse riescirsi, ed in modo semplicissimo, con la sola analisi de finiti ( *Veg. il suo* Trattato analitico delle Sezioni coniche, *a p.*81. *ediz.* 3. §.124.).

Ma ora facciamo osservare, che la proprietà importante delle curve coniche enunciata nella prima parte, l' è assai più generale; il che nè da Apollonio, nè da' geometri posteriori era stato finora avvertito. Ed essa può enunciarsi; e dimostrarsi come nel seguente:

TEOREMA.

*Se tra due tangenti Qq, Ss [ fig.10. ] di un' ellisse, o iperbole si tiri comunque una terza tangente QS, e quindi il diametro parallelo alla retta tra' contatti a, d, che le incontri ne' punti A, D; sarà di costante grandezza il rettangolo di AQ in DS, cioè de' segmenti delle due tangenti interposti tra il detto diametro, e la tangente arbitraria QS.*

DIM. Non essendo parallele le tangenti Qq, Ss, s' incontreranno in un punto P. E poichè il diametro PC, passante per questo punto, biseca(163, 287.) la corda tra' contatti *a d*, bisecherà ancora AD, che l' è parallela, e sarà perciò AC uguale a CD. Quindi se per uno de' punti di contatto *a*, *d*, per esempio *a*, si conduca il diametro *a*K, sarà DK uguale e parallela ad A*a*, e toccherà la curva in K. Sia H l' incontro di DK con la tangente arbitraria QS. Ed essendo le tangenti parallele PQ, DH segate dalle due tangenti QH, PD, risulterà $aQ \times KH = aP \times KD$; d' onde $aP : aQ :: KH : KD$; e componendo, e permutando si avrà $PQ : DH :: Aq : KD$. Or pe' triangoli simili SPQ, SDH

sta PQ : DH :: PS : SD ; ed è poi KD uguale ad $Aa$ , starà perciò PS : DS :: $a$Q : $Aa$ ; e dividendo , PD : DS :: AQ : $Aa$ ; e quindi sarà AQ×DS uguale a PD×$Aa$ . Ma il secondo di questi rettangoli rimane invariato , qualunque sia la posizione della tangente arbitraria QS ; adunque ancora il rettangolo di AQ in DS è di costante grandezza .

Cor. 1. Se invece di condurre il diametro $a$K pel contatto $a$ , si fosse tirato per l' altro contatto $d$ , si sarebbe trovato AQ×DS uguale a PA×D$d$ ; ond' è che dev' essere PD×A$a$ uguale a PA×D$d$ : e così è infatti ; poichè per le parallele AD , $ad$ sta , PD : PA :: D$d$ : A$a$.

Cor. 2. Se la tangente arbitraria QS prenda la posizione $qs$ , parallela ad A$d$ , toccando perciò la curva nell' estremo del semidiametro CB , conjugato alla direzione di AD , sarà del pari AQ×DS uguale ad A$q$×D$s$ . Or quando le tangenti in $a$ , $d$ fossero [ *fig. 11.* ] parallele, i punti $a$ , $d$ coincideranno sulla curva co' punti A , D ; AD ne diverrà quindi un diametro in grandezza , e le A$q$ , D$s$ saranno in tal caso uguali tra loro , ed al semidiametro CB conjugato a CA . In questa ipotesi sarà dunque AQ×DS uguale a CB², e si ritornerà così alla prima parte della proposizione precedente .

Cor. 3. Sia Q$qs$S [ *fig.12.*] un quadrilatero semplice qualunque circoscritto ad un' ellisse , o iperbole , e due de' suoi lati opposti sieno incontrati in A , D dal diametro parallelo alla corda che unisce i contatti co' lati medesimi : pel teorema or dimostrato sarà AQ×DS uguale ad A$q$×D$s$ , e quindi AQ : A$q$ :: D$s$ : DS .

Da ciò risulta la seguente rimarchevole proposizione.

*Se un quadrilatero semplice sia circoscritto ad una sezione conica a centro ; il diametro parallelo alla corda , che unisca i contatti con due qualunque de' lati opposti , divida i lati medesimi in parti reciprocamente proporzionali.*

*Alla def. VII-lib.II. (§. 176.) , ed alle corrispondenti per la parabola , e l' iperbole (§§.95 , a 288.)* — Apollonio assegnò i fuochi, nell' ellisse, e nell' iperbole , dall' applicazione all' asse primario di un rettangolo uguale al quadrato del semiasse secondario, deficiente nell' ellisse , eccedente nell' iperbole , per un quadrato ( *pr.45.III.* ) ; e però denominò tali punti *ex comparatione facta* , secondo la versione del Commandini , ritenuta da altri geometri , *ex applicatione facta* secondo quella dell' Halley. E comecchè una simile applicazione non poteva aver luogo nella parabola , poichè l' asse vi è indefinito ; perciò si tacque su tal punto per questa curva . I moderni hanno in vario modo assegnati i fuochi, partendo da una qualche special proprietà delle curve coniche relativamente ad essi, e però dandone per la parabola una definizione diversa

da quella per l'ellisse, o l'iperbole; ond'è che preferibile d'assai è quella uniforme adottata dal Fergola.

*Alla prop. XXIV. lib. II., ed allo scol. (§§.182, e 184.)* — L'attuale dimostrazione della parte II. di questa proposizione è più semplice di quella recatavi le altre volte. Invece poi del cor.2, che trovavasi nelle precedenti edizioni, perchè occorreva a dimostrare una proposizione seguente, or che abbiamo in altro modo condotta questa, vi abbiamo supplito il presente scolio, il quale contiene una verità di uso, che avremo altrove bisogno di ricordare.

*Alla prop. XXV. lib. II., ed a' suoi cor. (§§.185 a 189)* — Veggasi per questa proposizione ciò che fu detto per la corrispondente nella parabola (§. 102): similmente pel cor. 2. Nel cor. 1. poi vi è fatta rilevare un'altra proprietà dell'ellisse; o le verità, che deduconsi nel cor. 3, lo sono in modo più facile delle altre volte.

*A'cor.2, e 3 della prop.XXVII.lib.II.(§§.193, e 194)*— Nel cor.2 vi è rilevata più chiaramente che altre volte una proprietà locale per l'ellisse; e nel cor.3. un'altra singolare proprietà della medesima.

*Alla prop.XXVIII.lib. II.(§. 195), e XL. lib.III. (§.315.)*— L'attuale dimostrazione di questa proposizione è assai più semplice, che quella delle edizioni precedenti.

*Alla prop. XXIX. lib.II. e XLI. lib.III. (§§.196 e 316.)* — Le due parti di questa proposizione trovansi ora dimostrate più facilmente che le altre volte.

Sarà però utile di far osservare, che dallo secondo parte si rileva una relazione importante tra la normale appartenente ad un punto qualunque di un'ellisse, o di un'iperbole, terminata all'asse de' fuochi, o 'l semidiametro conjugato a quello, che passa pel punto medesimo; imperocchè essendo il rettangolo de' rami, che vanno a questo punto, uguale al quadrato di quel semidiametro (190, 308), ne seguirà che il rapporto della normale al semidiametro sia costante, ed uguale all'inverso del sudduplicato dell'asse al suo parametro; e quindi quanto l'inverso di quello del semiasse al suo conjugato. Laonde:

*La normale per un punto qualunque di una curva a centro, terminata all' asse de' fuochi, sta al semidiametro conjugato a quello, che passa pel punto medesimo, nel costante rapporto del semiasse secondario al primario.*

Cioè a dire [*fig.13.*], se PQ , SR sieno gli assi di un ellisse, o iperbole , MB la normale per un punto qualunque M , e CE il semidiametro conjugato a CM , starà

$$MB : CE :: CS : CP$$

2. Ma la normale gode altre notabili proprietà. Così se MB si distenda finchè incontri in D l' asse secondario , conducendo ad un degli assi l' ordinata MH , starà

$$MB : MD :: HC : HD$$

ed essendo costante la seconda ragione, ed uguale a quella di $CS^2 : CP^2$ (161 , 222.) , sarà costante anche la prima ; e ne risulta che :

*I due segmenti di una normale qualunque , determinati da' due assi , a partir dal punto della curva , cui essa corrisponde , serbano tra loro un rapporto costante , uguale all' inverso de' quadrati de' semiassi rispettivi.*

3. Da qui poi si rileva , che la proprietà enunciata nel num. 1. sia applicabile all' uno , ed all' altro asse , sicchè può generalizzarsi nel modo seguente :

*Il rapporto della normale per un punto qualunque , terminata ad un asse , al semidiametro conjugato a quello , che passa pel punto medesimo , è costante , ed uguale all' inverso di quello dell' asse stesso al suo conjugato .*

4. Ancora : Poichè sta

$$CS^2 : CP^2 :: MB : MD \text{ , ovvero } :: MB^2 : MB \times MD$$

e sta puro $\quad CS^2 : CP^2 :: MB^2 : CE^2$

ne risulta $\quad MB \times MD = CE^2$

Cioè a dire

*Il rettangolo de' due segmenti di una normale qualunque, determinati da' due assi , è sempre uguale al quadrato del semidiametro conjugato a quello, che passa pel punto cui corrisponde la normale.*

5. Da' punti B , D in cui le normali incontrano i due assi primario , e secondario si abbassino le perpendicolari BK , DG sopra il ramo MF, passante po 'l punto M , e por un fuoco F; starà

$$MB : MD :: MK : MG$$

Ma sta $\quad MB : MD :: CS^2 : CP^2 \text{ , ovvero } :: MK : CP$

per essere MK uguale al semiparametro dell' asse principale . Adunque sarà $\quad MG = CP$

Vale a dire :

*Se ad un punto qualunque di una sezione conica a centro conducansi il ramo , e la normale , e dall' inocntro di questa coll' asse secondario si tiri la perpendicolare al ramo ; la medesima ne troncherà verso la curva una parte uguale al semiasse primario.*

E volendo enunciare questa proposizione in modo analogo a quello della nota a' §§. 107 . 195 , e 315 ( *pag.* XVI ) può dirsi , che :

*La projezione della normale terminata all' asse secondario su ciascuno de' raggi vettori , passanti pel punto cui corrisponde la normale , è uguale al semiasse primario.*

Proprietà non meno notabile di quella dedotta ne' suddetti paragrafi.

6.È chiaro che le precedenti relazioni non possano aver luogo nella parabola ; ma per questa curva può notarsi che :

*La normale per un punto qualunque è media proporzionale tra' semiparametri dell' asse , e del diametro corrispondente a quel punto .*

Il che rilevasi facilmente dal §. 107. par. II.

*Dopo la prop. XXXI. lib. II.* — Il Fergola , nella seconda edizione delle sue *sezioni coniche* geometricamente trattate, chiudeva questo capitolo col recarvi il problema di : *Segare un cono retto con tal piano, che la sezione sia un' ellisse di dato asse maggiore , e di data eccentricità ,* o pure *che abbia dati i semiassi* , recandovi la stessa costruzione di Apollonio . Ed era ben regolare che un tal problema avesse luogo negli *Elementi* di tali curve ; poichè gli antichi non conoscendo altra maniera da esibire le curve coniche , a questa dovevano ricorrere necessariamente , per la costruzione de' problemi solidi . Non così per noi , che possiamo altrimente ottenerle nel piano . Quel problema dunque , per la Geometria sublime attuale diviene di pura speculazione, e non già di uso ; e però conveniva renderlo generale per qualunque cono : di che si darà una elegante soluzione nel cap.4. del lib.IV. , ove è trattato della esibizione delle curve coniche sì geometricamente , che meccanicamente .

*Alla prop. VI. lib. III. ( § 211. ) .* — Le altre volte si era rimessa la dimostrazione di questa proposizione all' analoga per l' ellisse (126.). Ma come che essa poteva rendersi più generale e semplice , senza tanta distinzione di casi , l' abbiamo però ora esposta a dirittura.

*Alla prop. XVII. lib. III. ( §. 232.)* — Il Fergola dovendo trattare delle iperboli conjugate , gli conveniva stabilire la possibilità di esse ; e però,nella seconda edizione delle sue *sezioni coniche*, recò per prima proposizione di questo capitolo, *de' diametri conjugati delle iperboli* , il problema di : *assegnare in un cono retto un' iperbole di dati assi primario , e secondario* , analogo a quello della prop. 29 ellisse , di cui è stato detto in una precedente nota ; e poi vi dimostrò , che : *gli estremi de' diametri secondari delle iperboli opposte allogansi nelle iperboli*

*conjugate*. Ma se un tal ripiego ben serviva al rigore della teorica che doveva stabilire, non faceva però procederla con un ordine naturale: poichè un tal problema, come per quello analogo dell' ellisse è stato detto, mirava ad altro scopo, ed ora non più richiedevasi essenzialmente nella moderna Geometria sublime. Queste ragioni ci hanno fatto rivolgere all' espediente di stabilire la presente teorica de' diametri conjugati sul teorema enunciato in questa proposizione.

Il problema poi recato dal Fergola si troverà risoluto nel cap. 4 del lib. IV.

*A' §§. dal 278 al 261.* — Per conseguenza di ciò che si è avvertito nella precedente nota, or si osserva una notevole diversità tra' principii stabiliti in questi §§. rispetto alle precedenti edizioni.

*Allo scol. dopo la prop. XIX. lib. III. (§. 264.)* — Ciò ch' e stato avvertito in questo scolio era di somma importanza; poichè si sarebbe potuto di leggieri cadere nell' equivoco di trasportare indistintamente ad un diametro secondario le stesse proprietà rilevate pel primario.

*Alla prop. XX. lib. III. ed a' suoi scolii (§§. 265 a 267.)* — Questa proposizione, ed i due scolii, che la seguono, sono stati questa volta introdotti, com' era conveniente in un trattato elementare su' *Conici*.

*Alla prop. XXIV. (§. 279.)* — Questa proprietà dell' iperbole equilatera, come pel cerchio, è nuova ed interessante nelle applicazioni.

*Alla prop. XXV. lib. III. (§. 280.)* — Del pari nuovo l' è quest' altro teorema, e necessario in appresso.

*Alla prop. XXXV. lib. III. (§. 297.)* — La verità, che vi si dimostra, è nuova.

*Alla prop. XXXIX. ed al suo scol. (§§. 309. e 314.)* — Questa proposizione vedesi ora dimostrata in una maniera assai elegante.

Merita poi di essere avvertito lo scolio, che corrisponde al cor. 3. prop. XXVII. ellisse.

*Alla fine del cap. V. lib. III.* — Il Fergola, nella prima edizione de' suoi *Conici*, riportò in questo luogo un nuovo teorema sulle curve coniche, rinvenuto all' occasione di ricerche per una cometa apparsa all' incirca il 1779, e consegnato negli Atti di Lipsia; ed ei posteriormente il sup-

presse, per attenersi allo stretto rigore di libri elementari, la perfezione de' quali non da congerie di verità risulta, ma da quelle che sono fondamentali, strettamente ordinate, e connesse. Intanto, aderendo noi sempre a sì giusto pensamento, non abbiamo creduto superfluo il recarlo in queste note.

TEOREMA.

*Dal fuoco F [fig. 14.] di una sezione conica KRQ sieno tirati i due rami FR, FK, e pe' loro estremi le tangenti RT, KT, e le congiungenti RK, TF: dico', che se dal punto E, ove la RK incontra l' ordinata FC pel fuoco, tirisi alla TF la perpendicolare EG; questa incontrando i rami, ne troncherà le parti FH, FI ciascuna quanto il semiparametro principale.*

DIM. Dal punto C si tirino le CM, CS, l' una parallela alla KR, l'altra perpendicolare alla linea di sublimità AN; e prodotta la PF in Q, si tirino ne' punti P, Q le tangenti PN, QN, che dovranno incontrarsi con la KR nello stesso punto N della linea di sublimità, e la FN dovrà risultare perpendicolare alla PQ (§§. 112, 199, 319), e però parallela alla GE. Laonde sarà NK : KF :: EN : FI. Ma pe' triangoli simili NKA, MCS si ha NK : CM :: KA : CS :: KF : CF (§§. 105, 197, 317.); e però permutando NK : KF :: CM : CF. Adunque starà CM : CF :: EN : FI. Ma CM è uguale ad EN; adunque CF sarà uguale ad FI: e quindi ciascuna quanto il semiparametro principale.

ALL' APPENDICE A' PRIMI TRE LIBRI,

Qual sia lo scopo della presente appendice, la prima volta aggiunta in questa edizione decima de' nostri *Conici*, si rileva abbastanza da ciò che n' è stato detto nella fine della *storia* premessavi; ed ancora dall' *introduzione* ad essa appendice.

# Note

## AL LIBRO QUARTO.

*Al cap. I.*— La dottrina della similitudine delle curve coniche, di cui questa volta abbiamo trattato nel presente capitolo, manca in tutte le instituzioni moderne de' *Conici*, con iscapito grandissimo del rigore, e dell'esattezza geometrica; poichè nel proseguir la carriera delle Matematiche spesso poi si è obbligati ad assumere come verità dimostrate quelle, che riguardano una tal dottrina, mentre mai si sono appreso: e bisognava però ripeterle o da' *Conici* di Apollonio, o da altri trattati ancor de' moderni, che non vanno frequentemente per le mani di tutti, come lo *Sectiones Conicae* del de la Hire, quello del de l' Hopital, *ec.*

*Alla def. 1.* (§. 322.) — Questa definizione corrispondo, presso a poco, a quella di Apollonio ne' seguenti termini: *Sectiones conicae dicantur* aequales, *si applicari possit altera super alteram, ita ut ubique conveniant, nec occurrant inter se*. Inaequales *autem sunto quae non ita se habent (def. 1. VI.)*.

*Alla def. 2.* (§. 326.) — Apollonio definì le *sezioni coniche simili* nel seguente modo: Similes *vero dicuntur sectiones, in quibus, ductis ad utriusque axem ordinatim applicatis, ipsae ordinatim applicatae ad portiones axis ab iisdem abscissas, verticique conterminas fuerint respective proportionales: diviso scilicet utroque axe in partes numero aequales, vel eandem inter se rationem servantes.* Dissimiles *vero sunt sectiones, quibus modo dicta non competunt (def. 2. VI.)*. Ma una tal definizione non corrisponde evidentemente a quella chiara nozione della *similitudine* delle figure, che noi indicammo già nelle note alle def. **1.** *Elem. VI*, e 10. *XI*; e ci sembra piuttosto una proprietà della *similitudine*, da doversi però da una più chiara definizione di questa dedurre. Molto meno ci sembra di quel carattere chiaro, ed intelligibile senza spiega, che deve avere una buona definizione in Geometria, il criterio di tal simiglianza adottato dal de la Hire, e ritenuto dal de l' Hopital (*Sect. coniq.* lib. V.), o da altri.

La nostra definizione poi, e la precedente danno evidentemente per conseguenze taluni teoremi dimostrati da Apollonio.

*Alla def. 3.* (§ 329.) — Apollonio tralasciò di definire le curve coniche *simili*, e *similmente poste*, come nozione abbastanza di per se

chiara, imitando in ciò Euclide ne' suoi *Elementi*. Ma noi, per maggior esattezza, non abbiamo stimato superfluo dichiararla.

*Alle prop. del pres. cap. I. lib. IV.* — Chiunque pongasi a far comparazione del nostro capitoletto col lib. VI. de' *Conici* di Apollonio, troverà che nessuna delle verità essenziali da questo gran geometra dimostrate vi sia omessa, o espressamente recandovela, con più breve e facile dimostrazione, o che possa dalle nostre in agevol modo dedursi; e che a di più ve ne sia un buon numero di assai importanti da questo gran geometra non considerate, e che al presente stato della Geometria sublime occorrono.

*Alla prop. I. lib. IV.* (§. 325.) — Questa proposizione viene qui dimostrata, usando della divisione armonica di una retta, in modo diverso, ed assai più semplice, che da Apollonio, o dal suo comentatore Eutocio non fu fatto (*Vedi prop. 24. IV. Conicorum*). Non sappiamo poi intendere, perchè una tal verità si trovi, con un' enunciazione alquanto diversa, di nuovo dimostrata, e nel modo stesso, nella prop. 6. VI. *Conicorum*; o potrebbe anche dubitarsi, che vi fosse stata introdotta dal traduttore arabo, pel nesso ch' essa ha con alcune proposizioni seguenti; o ancora, che per tal ragione l' avesse ivi recata lo stesso Apollonio, a fin di rendere queste teoriche del lib. VI. indipendenti, per quanto era possibile, da quelle de' primi quattro libri elementari.

*Alla prop. II. lib. IV.* (§. 331.) — Una tal verità notissima vien qui dimostrata in modo diverso da quello tenuto da Apollonio, nella proposizione 11. VI. *Conicorum*, come doveva avvenire pel diretto criterio da noi adottato nella definizione delle sezioni coniche simili.

*Alla prop. III. lib. IV.* (§. 333.) — Il criterio di similitudine da noi adottato ha resa questa proposizione presso che intuitiva, mentre Apollonio, dopo averla distinta in due proposizioni, l' una per gli assi (12. VI.), l' altra pe' diametri conjugati (13. VI.), vi adopera per ciascuna una ben lunga dimostrazione. Il de la Hire ne fece una sola proposizione pel caso generale de' diametri conjugati in uguali angoli (*pr. 2. VI.*), nel quale è inchiuso quello degli assi. Ma la dimostrazione, che vi recò, nè meno è paragonabile in semplicità alla nostra.

*Alla prop. IV. lib. IV.* (§. 337.) — Questa verità, che non trovasi negli altri trattati classici delle curve coniche, vi meritava un luogo. E

la dimostrazione dell' *aliter* ne dinota sempre più di qual vantaggio riesca la nozione da noi adottata per le curve coniche simili.

*Alla prop. V. lib. IV.* (§. *340.*) — Questa verità non trovavasi da alcuno considerata. Era già noto, come si dimostra in seguito, che: *due sezioni coniche ammettono, in generale, un sistema di diametri conjugati paralleli*; ma era necessario dimostrare rigorosamente, che questo sistema sia unico, senza che possa esservene un' altro fornito delle stesse qualità. Su di essa è poi interamente fondata la seguente prop. 16. importantissima, come si dirà nella nota corrispondente.

*Alla def. 4. lib. IV.*, *ed a' cor.* (§§. *343 a 348.*) — La presente definizione agevola di molto il ragionamento nelle proposizioni in cui se ne fa uso; e però abbiamo stimato conveniente introdurla. Sono poi assai utili i corollari, che se ne veggono dedotti. La denominazione di *punti omologhi, e diametri omologhi* da noi adottata sembraci assai più propria di quella di *simili*, della quale si valse il de l' Hopital; poichè questa risveglia l' idea di una corrispondenza di proporzione tra queste parti di due figure, e non di situazione, come nel presente caso ha luogo.

*Alla prop. VI. lib. IV.* (§. *350.*) — Verità già nota, e che vien presa d' ordinario pel fondamento della similitudine delle curve.

*Alla prop. VII. lib. IV.* (§. *353.*) — Questa proposizione, che vedesi facilmente dimostrata, comprende le due 26, e 27 del lib. VI. de' *Conici* di Apollonio. Nè era necessario soggiugnervi l' altra parte della non uguaglianza di tali sezioni parallele; poichè questa risulta evidentemente dalla disuguaglianza de' loro rispettivi assi primari.

*Alla prop. VIII.*, *ed al suo cor.* (§§. *354 e 355.*) — La verità enunciata in questa proposizione manca in Apollonio; ed è necessaria per la piena determinazione di alcuni problemi che seguono.

*Al cap. II. del lib. IV.* — Che s' instituisca anche un parallelo tra il lib. IV. de' *Conici* di Apollonio, che tutto si versa circa le intersezioni, ed i contatti delle curve coniche, con questo semplice capitoletto del nostro trattato, e si vedrà subito qual numero di verità nuove siensi in tale argomento stabilite, e come facilmente dimostrate.

*Alle prop. IX, e X. lib. IV.* (§§. *357 e 359*) — Anche Apollonio fon-

dà la dimostrazione del caso 1. di queste due proposizioni sulla proprietà della divisione armonica di una retta (*prop.25. e 26 IV. Conicor.*); ma non ritenne lo stesso principio per quella del caso 2, come noi abbiamo fatto, facendo rientrare la dimostrazione per tal caso in quella del primo.

Egli poi avvertì, che un tal caso 2 non possa verificarsi, se non per l'ellisse, e 'l cerchio, come noi ancora facciamo ora notare.

*Alla prop.XI.lib.IV.(§.560.)* — Apollonio distingue la dimostrazione del caso 1. di questa proposizione (*per lui la 27.IV.*) in due parti: quando cioè il punto d'intersezione suppongasi al di fuori di quelli di contatto; e per dimostrar questo si vale della divisione armonica: e quando quel punto stasse tra' punti di contatto, in cui adopera altro ripiego, che potea però egualmente valere per la prima parte, senza avorsi bisogno della distinziono suddetta. E noi così abbiamo fatto.

Dee intanto avvertirsi, che in tutt' i due casi supponesi possibile generalmente il doppio contatto di una curva conica con un'altra, o col cerchio, che non ha luogo per due parabole, per le quali un solo punto di contatto può esservi, come egli medesimo dichiara nella seguente prop. 28; e similmente in altri casi di esse curve, che Apollonio con ispecialità va divisando nelle prop. 29, 30, e 31, e che noi abbiamo creduto superfluo recare nel presente trattato, ove ci bastava preparar la materia da illustrare la costruzione de' problemi di *terzo e quarto grado*; ed anche perchè altre vie or somministra la moderna Analisi algebrica da discernere, nella composizione di que' problemi, il numero delle soluzioni reali che vi corrispondono.

*Alla prop.XII.lib.IV.(§.561.)* — Questo teorema di base al seguente, ch'è fondamentale per la composizione de' problemi *solidi*, non è stato, per quanto a noi pare, riportato da altri: il che formava essenziale difetto per la presente teorica delle intersezioni delle curve coniche, e per l'elegante composizione de' problemi poc' anzi detti col cerchio.

*Alla prop.XIII.lib.IV.(§.562.)* — La verità enunciata in questa proposizione è il fondamento dell'elegantissima costruzione Cartesiana pe' problemi detti *solidi* dagli antichi, e da' moderni *di terzo, e quarto grado*; e però con molto accorgimento lo Schooten intraprese a dimostrarla, nel suo comentario al lib. III. della *Geometria* del Cartesio. Ma una tale dimostrazione, condotta per un non breve sentiero algebrico-geometrico, mancava ancora della precedente assegnazione de' punti d'incontro di un cerchio con la parabola, ne' diversi casi d'intersezione, o

di contatto ; a che provvide il Fergola la seconda volta che ristampò le *Sezioni Coniche* nel 1810 , con la seconda parte della proposizione XIV inserita nel primo libro , premettendola alla seguente , ove poi tratta la verità in quistione . E lo stesso rifece in forma algebrica nella pagina 193 §. 354 del *Trattato analitico delle Sezioni Coniche* . Siccome però egli non aveva distinti , per gl' incontri del cerchio con la parabola, i casi d' intersezioni assolute,o combinate con contatto, o di contatti assoluti , nè meno vi ebbe riguardo a distinguerli nel dimostrare la presente proposizione , come or vedesi fatto , risparmiando il supplirvisi da chi apprende .

Il Cartesio assunse una tal verità come nota nella sua Geometria , e lo Schooten , nel comento ad essa , impiegò a dimostrarla algebricamente non meno di 12 pagine in 4°. E sebbene riescisse più breve quella per le stesse vie condotta dal Rabuel ; pure nulla vale in comparazione della nostra, dedotta da un semplicissimo ragionamento geometrico , e resa quasi intuitiva .

Ma perchè non diventi un mistero il modo come quel sommo uomo conobbe tal verità, ecco il cammino diretto, che dovè condurvelo ; e del quale avrebbe anche potuto lo Schooten avvalersi per la dimostrazione, che imprese a farne.

Prese per le equazioni al cerchio , ed alla parabola da combinarsi le seguenti

*al cerchio* $(y-b)^2+(x-a)^2=r^2$
*alla parabola* $y^2=2px$

riferendole all' asso della parabola , ed alla tangente del vertice, per assi delle coordinate , e dinotando con $a$ , $b$ le coordinate del centro del cerchio , si ha , eliminando tra esse la $x$ , la seguente equazione

$$y^4+4p(p-a)y^2-4pby+4p^2(b^2+a^2-r^2)=0.$$

Ed i quattro valori che debbono corrispondervi per la $y$ , dinoteranno le ordinate pe' quattro punti d' intersezione di quelle due curve.

Ma poichè l' eliminata in $y$ manca del secondo termine , dee la somma delle radici positive pareggiar quella delle negative. Adunque ec.

*Alla prop. XIV. ed a' cor. ( §§. 363 a 365. )* — La verità che si dimostra nella proposizione , e le altre che se ne deducono ne' corollari , sono la più parte nuove , o in nuovo , e più elegante modo dimostrate. E l' importanza di esse non solo è grandissima per la composizione de' problemi *solidi* ; ma eziandio per le descrizioni delle curve coniche con dato condizioni posizionali , come apparirà dal *cap. IV.* del presente libro ; o per altre ricerche su tali curve .

*Alla prop.XV. lib. IV , al cor. , ed agli scolii ( §§. 367 a 371. )* — Questa proposizione del tutto nuova , è una sorgente inesauribile di verità , e di ricerche importanti , delle quali una è quella di *assegnare i diametri conjugati paralleli*, per ottener la quale l'illustre geometra francese Poncelet fu obbligato a giri tortuosissimi , ed a considerazioni di tal natura , che la Geometria non vi acconsente . Sono poi egualmente nuove , ed importanti le cose dedottene nel corollario , e quelle espresse negli scolii .

*Alla prop.XVI.lib.III. , ed al cor.* (§§.372 e 373.) — Questa proposizione espone una verità importante generalmente conosciuta , e riportata ancora dal Poncelet , che perviene però a dimostrarla per le sue solite vie di *seganti ideali , legge di continuità , projezioni* .

*Alla prop. XVII. lib.IV.( §. 374. )* . — È un mirabile principio per trasmutare la composizione geometrica di un problema *solido* , ottenuta per due curve coniche , in quella elegantissima di una curva conica col cerchio .

*A' cor. della prop. prec. ( §§.375 e 376. )* — Le verità importanti , che qui veggonsi facilmente dedotte , sarebbe ben difficile l'ottenerle in qualunque altro modo .

*Allo scol. ( §. 377. )* — Questa bellissima proprietà del cerchio , rilevatavi dal dotto professore di Berlino Steiner , fu da lui proposta, nella breve dimora , ch' egli fece in Napoli , a dimostrare al Trudi , stimando di qualche difficoltà il pervenirvi . Ma la nostra dimostrazione la rende pressochè intuitiva .

*Al cor 3. (§. 378.)* — Il principio Cartesiano rilevato nella prop.13. meritava di essere convenevolmente esteso per le intersezioni delle curve coniche in generale con la parabola , come qui vedesi elegantemente fatto.

*Alla prop. XVIII. lib.IV. (§.379.)* — È riportata dal Poncelet , dimostrandola co' suoi consueti principii . E si vedrà in appresso di quale importanza sia per la teorica delle *osculazioni*.

*Alla prop. XIX. lib.IV. ( §. 385. )* — Questa verità , che vedesi qui ridotta quasi ad intuizione , è fondamentale pe' sistemi di due sezioni coniche .

*Alla prop. XX. lib IV, ed a' suoi cor. ( §§. 386 a 389. )* — È affatto nuova, ed importante per molte ricerche; e per mezzo di essa si potranno *determinar facilmente le intersezioni di due sezioni coniche concentriche, date per mezzo de' soli loro determinanti*.

Non meno rimarchevoli sono le verità, che ne' corollari veggonsene facilmente dedotte.

*Allo scol. 1. della prop. XX. lib. IV. (§. 390.)* — Si vegga con quanta semplicità sia qui risoluto un difficil problema, di cui appena s'incontra qualche soluzione geometrica assai stentata, e poco concepibile.

*Alla prop. XXI. lib. IV, ed a' suoi cor. e scolii ( §§. 394 a 403 )*. È ancor nuova, e di grande importanza nella teorica delle *osculazioni*, come si vedrà trattandone.

Sono poi degni pur di considerazione le verità, che recansi ne corollari; e quella dello scol. 1. (§. 402.). è un bellissimo, e nuovo *porisma* conico.

*Alla prop. XXII. lib. IV, ed a' cor. ( §§. 404 a 407. )* — Queste proprietà delle intersezioni per le parabole similmente poste, non furono considerate da Apollonio, nè da altri.

*Alla prop. XXIII. lib. IV. ed a' cor. ( §§. 408 a 410. )* — Nè tampoco queste altre veggonsi da Apollonio riportate.

*Alla prop. XXIV. lib. IV, ed a' cor. e scolii ( §§. 411 a 413. )* — Apollonio non considerò le intersezioni della parabola con l' iperbole; ma molto si estese in dimostrar quelle delle iperboli tra loro, componendone più proposizioni, con cui chiude il lib. IV. *Conicorum*. E l' imperfetta conoscenza, che noi abbiamo della Geometria antica ci toglie il poter conoscere il perchè tanto si fosse quel gran geometra esteso in questo assunto; non conoscendo noi nè meno un sol problema *solido* dagli antichi risoluto con la combinazione di due iperboli.

*All' introduzione al cap. III.* ( §. *416. nel princ.* ) — Per comprova di ciò che qui si accenna, relativamente al lib. V. de' *Conici* di Apollonio, si potrà leggere la nota al §. 469.

*Alle nozioni preliminari pel cap. III. del lib. IV.* (§§. *417 a 423* )— Vedesi qui talmente dichiarata la natura diversa de' contatti, e delle osculazioni delle curve in generale, da non rimanere più su di ciò alcun dubbio. E da tali dottrine risulta evidente l' equivoco del Leibnitz in far consistere l' *osculo* nella coincidenza di due contatti, ossia di quattro intersezioni, il che manifestamente veniva contraddetto, da che il cerchio osculatore di una curva conica non avrebbe potuto incontrarla mai più (360.). E rimangono ancora dichiarati i seguenti luoghi di Giacomo Bernoulli, nelle *Notae in Geometriam Cartesii*, l' uno ove dice: *Coincidentibus tribus intersectionum punctis, futurum sit, ut circulus parabolam, quam hoc casu osculari dicitur, non tangat, sed secet*; come era stato ancor prima di lui notato dallo Schooten *a pag.* 339. de' suoi comenti al Cartesio. L' altro è il seguente: *Fieri enim potest ut radius circuli curvae sit perpendicularis, et tamen circulus hoc radio descriptus curvam non tangat, sed secet. Nempe si concursui duarum intersectionum, sive contactui tertia intersectio accesserit, et sic quod* osculum *dicitur effecerit*. E quest' ultima dichiarazione mostra, ch' egli avrebbe dovuto più precisamente esprimersi dicendo *et tanget et secet*, in vece di *non tangat, sed secet*.

Una tal dottrina fu pure chiaramente spiegata dal di lui fratello Giovanni, nelle lezioni XV, e XVI *de methodo integralium*, che dettò, stando in Parigi, all' illustre marchese *de l' Hopital*. E così pure l' hanno intesa posteriormente tutt' i geometri. Ma la maniera come vedesi qui esposta, e resa generale, sembraci nuova, e da poter anche guidarne a ricerche più sublimi, da trattarlo con la moderna Analisi.

*Alle def. 1, e 2* (§§. *424, e 427.*) — La prima di tali definizioni è una conseguenza delle precedenti considerazioni, dalle quali risulta però manifestamente dichiarata; e dal §. 426 si rende anche evidente la def. 2.

*All' articolo del contatto di 2° ordine tra le sezioni coniche* ( §§. *428 a 445* ). — Qui vedesi più specificato il principio dell' osculazione, e connesso col teorema dimostrato nella prop. 18 del cap. prec., che per noi serve di fondamento a quella teorica, e da cui deo trarsi la soluzione elegantissima del problema di: *assegnare una sezione conica osculatrice del 2° ordine di un' altra in un dato punto*, che vedesi nella prop. 25.

*Alla prop. XXV. lib. IV. (§. 435.), al cor. ed agli scolii (§§. 436 a 440)* In questa proposizione vedesi geometricamente risoluto il problema di *descrivere una sezione conica osculatrice di 2° ordine di un' altra*, di cui è un caso particolare quello del *cerchio osculatore*; e la soluzione elementare, che se ne reca, mostra di qual prevalenza sia la Geometria, quando di essa sappiasi fare un convenevol uso, e si studii a ben adoperarla. Il corollario ne annunzia poi altre dottrine su tale assunto atte a richiarar la natura di questo problema, e 'l modo come debba essere ne' casi particolari condizionato. Ed i due scolii (§§. 437. a 439, e 440), oltre al continuare lo stesso soggetto del corollario, danno luogo, il primo di essi, ad un nuovo teorema locale, ed al converso; ed il secondo serve a dilucidare un punto essenziale della costruzione del problema.

*Alle prop. XXVI, e XXVII. lib. IV.* — Sono nuove, e sempre più tendenti a rischiarare la teorica generale delle osculazioni. E finalmente da esse derivasi per conseguenza ciò, che d'ordinario soleva assumersi senza dimostrarlo, cioè, che: *la curvatura di una sezione conica in ciascun punto sia la stessa, che quella del cerchio osculatore in tal punto*; da cho risulta anche rischiarata la def. 2. (§. 427).

*All' articolo del contatto di 3° ordine, tra le sezioni coniche.* — Di questo argomento non si era alcuno finora così estesamente occupato; e pure vedesi qui ridotto ad una chiarezza elementare, e risoluto per esso il problema di: *assegnare l' osculatrice di 3° ordine in un punto dato di una sezione conica*, in modo semplicissimo.

*Alla prop. XXVIII. lib. IV. (§. 448), ed agli scolii (§§. 449, 451, 454.)* — In questa proposizione risolvesi, pel contatto di 3° *ordine* tra le curve coniche, il problema analogo a quello della prop. 25, pel contatto di 2° *ordine*; e vi si osserva la stessa eleganza, e semplicità provveniente da' principii geometrici antecedentemente bene stabiliti.

Lo scolio 1. poi non fa che abbondevolmente riconfermare ciò, che precedentemente si era detto, per la quadruplice riunione di quattro intersezioni in tale specie di contatto; e quindi definire quando possa il medesimo aver luogo tra le curve coniche. Finalmente le considerazioni fatte negli scolii seguenti conducono a tre verità importanti per questa teorica (§§. 455 e 456.)

*Alla prop. XXIX. lib. IV. (§. 457), ed al suo scol. (§. 458.)* — Verità importante, e nuova, dalla quale veggonsi sviluppate nello scolio due

altro, cioè che: *il cerchio non possa aver contatto di terz' ordine con una sezione conica, se non ne' soli vertici principali*; o che: *il diametro di un tal cerchio debba pareggiare il parametro dell' asse.*

*Alla prop. XXX. lib. IV, ed a' cor. (§§. 459 a 462)*—Si osservi con quanta facilità ottengasi la dimostrazione di quest' altra proprietà de' contatti di 3° *ordine*, dalla quale deducònsene poi immediatamente altro ne' corollari. E vi si fa in fine la necessaria comparazione tra questo genere di contatto, e quello di 2° *ordine*.

Si noti pure come facilmente derivi dalla proposizione la verità enunciata nel n. II. del §. 460, che per altro vie sarebbe riescita difficilissima a rinvenire, e dimostrare.

*Al titoletto sul cerchio osculatore (§§. 463. e 464)* — Qual dovesse essere la natura di un tal cerchio, ben si rilevava dalle precedenti dottrine, le quali però come principalmente tendovano ad esso, si è dovuto qui con ispecialità trattarne; o fissarne anche preliminarmente i suoi principali caratteri rispetto alla curva osculata.

*Alla prop. XXXI. lib. IV, ed agli scolii (§§. 465 a 471)*— La semplice enunciazione della prop. dichiara abbastanza il suo oggetto; e negli scolii vi si considera quanto è necessario a bene stabilir la natura di questo problema.

*Alla prop. XXXII. lib. IV. (§. 473.)*. — Dopo le precedenti ricerche geometriche pel raggio di osculo nelle curve coniche, essendoci qui rivolti ad un' assegnazione aritmetica di esso, abbiamo conformata a questo scopo l'enunciazione del presente teorema; ed è però ch'essa si troverà ora corrispondere non più a quella, che ne diede il Fergola nel suo trattato geometrico delle *Sezioni coniche (ediz. 2.)*; ma si bene all' altra che vedesi nel trattato analitico delle stesse curve *(prop. 86)*.

Ma ciò che merita essere specialmente notato per questo teorema si è il vedersene fatta una chiara, e semplice dimostrazione, senza inchiudervi quantità evanescenti, come il Simson avova desiderato, e vi si era potentemente adoperato in riescirvi, con averne ancora rimproverato Giacomo Milnio per essersene valuto (*Ved. l' introd. al pres. cap.*); il che di quanta difficoltà sia stato in riescirvi lasciamo a' geometri il valutarlo.

Un' altra circostanza poi degna di osservazione si è, che per un tal teorema, com' era enunciato dal Fergola, e secondo la dimostrazione tanto geometrica, che analitica da lui datane (*V. i trattati di sopra ci-*

*tati )* esigevasi che la normale fosse necessariamente terminata all' asse de' fuochi, mentre per la nostra enunciazione ; e dimostrazione può aver luogo per qualunque degli assi. E da ciò risulta ancora, che r. *Nelle curve coniche a centro , i cubi delle lunghezze della normale , per uno stesso punto , riferite a' due assi , sieno tra loro come i quadrati de' parametri degli assi stessi* . La qual verità può anche vedersi dalla prop. enunciata al n. 2° della nota a' §§. 196 , e 316.

Dopo ciò , perchè non rimanga dimenticata la dimostrazione del Fergola , abbiamo stimato a proposito di qui recarla.

TEOREMA.

*In una qualunque curva conica CDA [ fig.15.] ; il cubo della normale AK è uguale al parallelepipedo , che ha per base il quadrato del semiparametro principale , e per altezza il raggio AR del cerchio osculatore.*

Dim. Dinoti AD quell' archetto elementare della curva conica ADE , la cui curvatura confondesi con quella del cerchio osculatore corrispondente , il cui centro sia R ; dal quale s' intendano tirate agli estremi A , D dell' archetto i raggi RA , RD , e dagli stessi punti conducansi al fuoco F di una tal curva le rette FA , FD. Di poi abbassata la FP perpendicolare alla tangente della curva in A , si calino da' punti D , H le DT , HG perpendicolari alle FA , RA rispettivamente. Sarà chiaro dover essere AT la differenza de' rami FA , FD : poichè l' archetto , che si descrive dal centro F con l' intervallo FD , deesi confondere colla DT . E così pure la GK dovrà disegnare la differenza delle RH , RK.

Inoltre essendo FA : FK :: FD , o FT : FH ( poichè nell' ellissi , e nell' iperbole ciascuna di queste ragioni pareggia quella del semiasse principale all' eccentricità (193 , e 311.) , e nella parabola facilmente si rileva essere FA = FK , ed FD , o FT = FH ) ; sarà AT : KH :: FA : FK *(19. El. V.)*.

E poichè per la similitudine de' triangoli ATD , FAP , sta AD : AT :: AF : AP ; e si è qui sopra dimostrato essere AT : KH :: FA : FK ; la composta dalle prime ragioni di queste due analogie sarà quanto la composta dalle seconde , e però si avrà AD : KH :: $AF^2$ : AP$\times$FK . Inoltre per la simiglianza de' triangoli KHG , KBA , sta KH : GH :: KB : BA :: FK : AP :: FK$\times$AP : $AP^2$ . Dunque sarà , per egualità ordinata , AD : GH :: $AF^2$ : $AP^2$ . Ma la prima di queste due ragioni è uguale a quella di AR ad RG, po' triangoli simili ARD,GRH. E , per la similitudine degli altri due AKL , AFP , la seconda delle dette ragio-

al è quanto quella di $AK^2 : KL^2$. Dunque sarà $AR : RG :: AK^2 : KL^2$; e convertendo dovrà essere $AR : AK :: AK^2 : AL^2$, cioè a dire sarà il cubo della normale AK uguale al solido, che ha per base il quadrato del semiparametro AL (107,195,315.), e per altezza il raggio di osculo AR. — *C. B. D.*

*Allo scolio 3. della prop.* **XXXI.** *lib. IV.* (§.*469.*). — Chiunque si porrà ad attentamente considerare le prop. dalla 12. in avanti, del lib. V. *Conicorum* di Apollonio, potrà trarre da alcuno di esso argomento analogo al ragionamento da noi fatto nel presente scolio; e si accorgerà, che se nell' antica Geometria fosse occorsa la ricerca della curvatura delle curve coniche ne' diversi loro punti, un passo solo bisognava dare, per rinvenire tra' cerchi esterni, nel luogo del contatto, quello di cui una delle due intersezioni con la curva cadesse nel contatto stesso; e che quindi si venisse ad assegnare il raggio del cerchio osculatore della curva.

*Al cap. IV. del lib. IV.* — L' importanza della materia trattata in questo capitolo, e l' ordinamento, che le si è dato, ben si rileva dall' introduzione al medesimo.

*Alla prop. XXXV. lib. IV (§.499)* — L' eleganza di questa soluzione è tale, che supera ancora in facilità quella, che ne diede Apollonio pel solo cono retto (*prop.50. lib.VI. Conic.*); ed è notabile, che mentre essa sembra, ed è effettivamente tanto naturale, e par che avesse dovuto a prima vista presentarsi a chiunque; pure pria che giugnere alla medesima altre soluzioni ben complicate se n' erano date da' nostri valorosi geometri Nicola Trudi, e Francesco Grimaldi, che stimiamo inutile qui recare.

Tra i MSS. del Pascal, dal di lui nipote Perrier inviati al Leibnitz per ordinarli, ed esaminarli, vi era un frammento con l' epigrafe *magnum problema*, che dal Leibnitz fu creduto poter essere il seguente, che v' era contenuto. *Dato puncto in sublimi, et solido conico, ex eo descripto; solidum ita secare, ut exhibeat sectionem conicam datae similem*. Ed è questo il problema risoluto nelle nostre prop. 34, 35, 36.

*Alla prop.XXXVI. lib.IV.* (§.*502.*), *ed allo scolio* (§§.*503.*) — La soluzione del presente problema procede analogamente a quella del precedente per l' ellisse; ma dallo scolio 1. rilevasi, che possano verso un lato stesso del cono ottenersi due serie diverse d' iperboli simili ad una data; il che per l' ellisse non aveva luogo. Ed è uopo os-

servare, che la soluzione Apolloniana del presente problema, pel caso del cono retto, esibisco la determinazione precedente alla soluzione, cioè come debba esser condizionato 'l cono pel rapporto tra l'altezza e 'l diametro della base, affinchè vi si possa, segandolo con un piano in certo modo, ottenere un' iperbole data (*Vedi Apoll. prop.29. lib.VI., e Ferg. Sez. con. prop.18. lib. III.*)

*Alla sez. II. del cap. IV. del lib. IV.* — Nell' assegnar la genesi delle curve coniche per moto organico, ci siamo attenuti a quella comunemente riconosciuta da' geometri, fondata su di proprietà di esse, che danno luogo ad un meccanismo assai semplice; e della quale si prevalse l' illustre marchese de l' Hopital nell' insigne suo *trattato delle Sezioni Coniche.* Certamente che una tal descrizione non va esente, quando praticamente si usi, da' difetti inseparabili dagli strumenti meccanici, in cui nè la linea retta, nè i punti che vi si adoprano, o si segnano sono linee rette, e punti geometrici: da che ben rilevasi non dover la Geometria procedere su meccaniche operazioni, ma sì bene su di astratte considerazioni, ancorchè la natura delle cose ch' essa considera sembri da meccanismi dipendere. Ed è però, che gli antichi dissero meccaniche quelle curve, per le quali altra genesi non potevano presentare, se non assolutamente pel moto di strumenti, avuto sempre riguardo alla natura del continuo ch' essi trattavano; tal che la *concoide*, la *cissoide*, la *quadratrice*, la *spirale*.

Or un illustre geometra italiano della metà del passato secolo (al quale deve l' Italia l' istituzione di una società libera di dotti, che tanto l' ha onorata, ed onora, sebbene questa or veggasi deviata dallo scopo principale di essa, che furono le Matematiche) in vista de' difetti, che avevano luogo ne' meccanismi da noi indicati, nello scolio prop. 37, si diede ad escogitare un altro strumento fondato su di una nuova proprietà delle curve coniche, dalla quale ne deriva per conseguenza un' altra; e per mezzo di esse impegnossi a congegnare uno strumento, col quale potevasi descrivere ciascuna di quelle curve per movimento continuo. Ma un tale strumento nulla togliendo a' difetti del meccanismo in Geometria, e riuscendo più complicato, e meno maneggevole, i geometri, mentre hanno ammirata l' ingegnosa invenzione del Lorgna, si sono astenuti dall' adoperarlo, attenendosi a' meccanismi già prima conosciuti. E per noi basta aver ciò indicato, perchè nulla mancasse alla conoscensa di quanto siesi fatto nella scienza de' Conici, sì per la loro teorica, che per la pratica; rimettendo chi verrà conoscere un tale strumento, o la proprietà sulla

quale n'è costrutto il meccanismo al III° degli *opuscula mathematica et physica* del Lorgna, pubblicati in Verona nel 1770.

*Alla prop. XXXIX. lib. IV, ed agli scolii* (§§. *511 a 513.*). — La soluzione di questo problema è nuova, ed assai elegante.

*Alla prop. XL lib. IV, ed allo scol.* (§§. *514 e 515*). — Del pari nuova è la soluzione del presente problema inverso del precedente.

*A'* §§. *da 519 a 529.* — Tutto questo argomento per le evolute delle curve coniche fa continuazione a quello del cerchio osculatore, nella sezione precedente. Ma noi l'abbiamo quì recato, per la ragione, che le considerazioni relative ad esso davano luogo a descrivere una curva per punti; di che trattai nella sezione presente.

*Alla def. III.* (§. *519*), *ed allo scol* (§.*520*) — In questa definizione abbiamo seguito l'uso, che n' è invalso presso i geometri, dall'Ugenio in poi: ma parrebbe più regolare, che la curva detta *evoluta* prendesse il nome d' *involuta*; poichè su di essa si considera da prima avvolto il filo che avolgesi; ed al contrario si chiamasse *evoluta* quella che risulta da un tale aviluppo, cioè dall'evoluzione, o svolgimento del filo. Altronde potendo ancora la prima essere riguardata come la curva toccata da tutte le normali dell'altra, essa rientra nella classe di quelle, che da' moderni son dette *inviluppi*, voce equivalente ad *involgimenti*.

*A' teoremi fondamentali* (§§. *532 e 538.*) — È stato già avvertito nel principio di questa sez. III., che la bellissima proprietà per l'esagono iscritto in una curva conica, da noi dimostrata nel *teor. 1. fondam.*, fosse dovuta al Pascal, il quale vi pervenne partendo dal dimostrarla nel cerchio, servendosi di quel mezzo delle projezioni, del quale a' nostri tempi si è sì utilmente valuto un altro geometra francese, per rilevare altre importanti proprietà delle curve coniche. E su quel principio aveva poi quel sublime ingegno fondata una teorica de' *Conici*, che il Leibnitz ebbe sotto gli occhi, inviatagli dal Perrier; ed apprezzò moltissimo un tal lavoro, da desiderare, che venisse al più presto pubblicato con le stampe, dubitando forse, che altrimenti non venisse a perdere il pregio di sua originalità, mentre egli vedeva comparire de' trattati, che avevano con le escogitazioni del Pascal grandissima relazione. Ma quest' opera non fu mai pubblicata; nè di essa si è potuto in seguito aver più alcuna notizia, per quante diligenti ri-

cerche siensi fatte . E nella stessa veniva la proprietà suddetta denominata *hexagrammum mysticum* , a che il Leibnitz aggiunse *et conicum* , Ma noi non crediamo , che un tal teorema , e l'altro seguente , che n'è derivato , fosse stato finora da alcun altro geometra dimostrato sì elementarmente ; e con tanta semplicità applicato alle ricerche seguenti . E raccomandiamo su tal proposito a' giovani di riscontrare attentamente tutto quello , che in questo articolo ne vien detto , dal valente geometra *Poncelet* , nella sezione II. del suo egregio trattato delle *propriétés projectives des figures*.

*A' cor. delle due prop. fondam. ( §§. da 535 a 537 , 539 a 540.)* — Tutto ciò che in questi corollari è dedotto dalle rispettive proposizioni è di grandissima importanza , del pari che le proposizioni stesse ; e serve alla determinazione de' due problemi seguenti.

*Alle prop. XLVI, e XLVII. lib. IV. ed agli scolii 1 e 2 della prima di esse ( §§. 541 a 544.)* — Le costruzioni de' due problemi indicati risultano elegantissime , non solo se riguardisi alla facilità di eseguirle ; ma eziandio perchè tali due difficili problemi risultano risoluti solamente col condur rette.

Nello scol. 1, (§.542.) , vi si vede evidentemente specificata la natura della curva ; e nel 2 ( §. 543. ) , risoluto ancora , col semplice tirar rette , il problema , *di condurre la tangente alla sezione conica , che passi per cinque punti dati* , senza descriverla ; il che spesso può occorrere .

Ma ritornando alla prop. XLVI', osserveremo , che il sommo Newton, di cui ogni pensiero era una novità importante nella scienza , dimostrò , che : *se due angoli co' loro vertici fissi in due punti, vadansi volgendo intorno ad essi come poli, sicchè le intersezioni di due loro lati , che sono dal verso stesso , scorrano lungo una retta di sito ; le intersezioni degli altri due lati dovranno descrivere una curva conica.* E di questa verità, ch' egli dimostrò con la pura Geometria ne' suoi *Princip. Mathem*, ( *lem. 21.* ) , e con l' analisi algebrica nell'*Arithm. Univer.* ( *Sez. IV. probl. 57.* ) si valse ad isnodare il problema di : *Descrivere la sezione conica per cinque punti* ; il quale risultava per tal modo risoluto ad un tratto geometricamente , e meccanicamente ; poichè facil cosa era il congegnare uno strumento con que' due angoli vertibili intorno a due punti fissi , Ed il Maclaurin di fatti adottando , nella sua *Geometria organica* , quel teorema ( che dimostrò anche con l' analisi algebrica , in modo però diverso dal Newtoniano ) per fondamento della descrizione organica delle curve di 2° *ordine* , sen valse del pari in

costruire il problema della descrizione di una curva conica per cinque punti ( *Geom. organ.* prop.4. ).

Anche il de l'Hopital, trasmutando quel teorema in problema locale, adoperollo allo stesso oggetto ( *Sections coniques* §§.371 *e* 375. ).

Intanto il Newton, precedentemente alla testè indicata soluzione del problema, ne aveva già data un' altra fondata su quella proprietà delle curve coniche, che costituisce un caso del famoso problema *delle quattro rette*, all' uopo da lui esposto in forma di teorema, ne' lemmi 17 e 18 lib. I. *Princip. Mathem.*; dal quale risultava descrittibile per punti la curva conica, che passi per cinque punti dati ( *prop.22. prob.14. lib. I.* ); mentre nel modo già detto, da lui esposto nell' *aliter* della citata proposizione, la curva potevasi meccanicamente descrivere. Ed il Fergola fin dalla prima edizione delle sue *Sezioni Coniche*, un'altra via tenne in risolverlo, valendosi delle note proprietà di tali curve, e pervenendo con la sua analisi geometrica ad assegnare direttamente i determinanti della specie della curva da descriversi meccanicamente. La quale pregevolissima soluzione, per non farla rimanere dimenticata, qui recheremo.

### Problema.

*Descrivere la sezione conica per cinque punti dati.*

#### Analisi Geometrica.

Si uniscano i punti A, C [*fig.16.*], e gli altri due B, D per le rette AC, BD, e dall' altro punto E si conducano le rette EF, EG rispettivamente parallele alle congiunte AC, BD. Saranno proporzionali i rettangoli de' loro segmenti, cioè a dire sarà BND : BMD :: ANC : EMF ( 65, 167, 291. ) Ma in quest' analogia son dati i primi tre rettangoli, ed è anche data la EM base del quarto; dunque dovrà esser data la sua altezza MF *. Quindi è, che sarà dato il punto medio O dell' intera FE; e con ciò sarà data di posizione la retta OV, che passa pe' punti medii O, V delle due parallele EF, AC date di posizione, e di grandezza. In simil modo si raccoglie dover esser data di posizione la KH, che passa pe' punti medii H, K delle altre due parallele BD, GE, date ancor esse di sito, e di grandezza. Dunque sarà dato di posizione il punto L, ove s' intersegano le VO, HK. E questo dovrà essere in tal caso il cen-

* *Riducendo i primi due rettangoli ad una base comune, e 'l terzo a quello della base EM del quarto termine da determinare, si ha la precedente proporzione ridotta in rette, di cui la quarta proporzionale sarà l' altezza cercata MF.*

tro dell' ellisse, supposto che il punto E stia in mezzo al quadrilineo MEPN. E per trovare due semidiametri conjugati di tal curva, dovrà istituirsi la seguente proporzione. Facciasi $CV^2 : FO^2 :: RL^2 - LV^2 : RL^2 - LO^2$; sarà dividendo $CV^2 - FO^2$, cioè $M^2 : FO^2 :: LO^2 - LV^2$ ossia $N^2 : RL^2 - LO^2$, cioè $X^2$. Ma in questa proporzione son dati i primi tre termini; dunque sarà dato il quarto $X^2$, cioè $RL^2 - LO^2$. Ed in tal modo saprassi $RL^2$, per esser dato $LO^2$; e quindi anche la RL. E se poi si tiri la LS parallela ad OF, e di tal lunghezza, che stia $LS^2 : RL^2 :: FO^2 : RL^2 - LO^2$ *; sarà dato il primo termine di quest' altra analogia, per esser dati i rimanenti. Quindi avrassi la retta LS. Ed essendo date di posizione, e di grandezza le rette LR, LS, che sono i due semidiametri conjugati dell' ellisse da descriversi, saran dati i semiassi conjugati di cotesta curva (155 e 511.), che potrà poi esibirsi.

Che se le rette OV, HK [*fig.17.*], le quali passano pe' punti medii delle parallele AC, FE, e delle altre due EG, BD, riescano parallele fra loro; la curva da descriversi sarà parabola, di cui eccone l' asse, e 'l parametro di esso.

Si è detto nel libro I. ( *dim. pr.11.* ), esser la differenza de' quadrati di AV, e di FO uguale al rettangolo di OV nel parametro del diametro OI. Dunque, per esser dati que' due quadrati, e la OV base di questo rettangolo, si saprà la sua altezza, ch' è quel parametro. Inoltre potrà anche sapersi il vertice R del diametro RI, per essere $AV^2$ uguale al rettangolo del detto parametro nella VR. E così pure si potrà determinare il vertice S, e 'l parametro del diametro SQ. Quindi è, che se prendansi nelle RI, SQ le RX, SY rispettivamente uguali alle quarte parti de' detti parametri, e per X, Y si tirino le XZ, YZ parallele rispettivamente alle AC, DB; queste segneranno colla loro intersezione il fuoco Z; e la ZT parallela alla RI sarà l' asse, di cui si troverà il vertice, ed il parametro cogli artifizi di già noti. Onde si potrà descriver tal curva nell' un de' modi esposti nella sez.II. del pres. cap.

Inoltre converrà l' analisi quassù recata adattarla all' iperbole, se la posizione de' punti faccia conoscer chiaramente non potersi per essi condurre una parabola, o un' ellisse, o se rinvengasi $RL^2$ [ *fig. 16.* ] minore di $LO^2$, ed il valore di $RL^2$ negativo.

Passando ora alla nostra prop.47., per porla a confronto con quella del Newton, convien riflettere, che per questa ebbe egli bisogno di più lemmi, due de' quali sono quelli di cui si accenna nella seguente *nota al lemma, ed alla prop. 50.*

—

* *Facendo* $RL^2 - LO^2 = M^2$, *si ha* $LS : LR :: FO : M$.

Giova ancora osservare, che i problemi dal *n. III.* *al VI.* dello scol. 2. (546.) veggonsi dal Newton risoluti, nelle prop. da 23 a 26 del libro I. de *Princip.Math.*, con la successiva riduzione dell'uno all'altro; e che per quello *n. V.* vi fu bisogno del nuovo lemma problematico, di *trasmutare una figura in un'altra dello stesso genere*; sebbene questo non si rimanesse limitato alla costruzione del soprindicato problema, ma potesse con utilità adoperarsi nella soluzione de'problemi *solidi*, come egli stesso il faceva avvertire nel conchiudere la soluzione di tal lemma.

*Al lemma, ed alla prop. L. lib. IV, (§§. 551. e 552.)* — La verità dimostrata nel lemma è un caso del lemma 23 de' *Princip Mathem.*, nel quale le congiungenti i punti P, Q; *p*, *q*. . . [*fig.18.*] suppongansi divise nella stessa ragion data delle parti, che prendonsi su'lati del quadrilatero. L'enunciazione del Newton è la seguente: *Si rectae duae positione datae, ad data puncta terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, et recta qua puncta indeterminata (in ipsis) junguntur secetur in ratione data: dico quod punctum hoc sectionis locabitur in recta positione data*. La dimostrazione ch' egli diede è sì facile, e piana, che non istimiamo modificarla in modo analogo a quello tenuto nella nostra.

Un tal lemma, che per noi ha servito a dimostrare la proposizione seguente ebbe lo stesso scopo pel Newton, il quale però dedusse questa proposizione per corollario di un altro lemma (il 25 del lib.I.). E quando questo corollario si volesse trasformare in proposizione come la nostra, la dimostrazione del lemma 25 costituirebbe in gran parte quella di tal proposizione. Ma il valentuomo ebbe bisogno pel lemma 25.di una proprietà già nota dell'ellisse (e dell'iperbole), che Apollonio dimostrò nella prop. 42. lib. III. *Conicorum*, e che presso noi forma la 22.lib.II. e 33,III, della quale ne costituì il lemma 24; nè sappiamo comprendere il motivo, che lo avesse indotto a dimostrarla, mentre in casi simili, al più, si ora limitato ad enunciare la proposizione, soggiugnendovi: *Patet ex Conicis.* Nè tampoco ciò osservarono i suoi comentatori perpetui.

Merita ancora di essere avvertito, che l'illustre geometra Poncelet, dopo di aver rilevato alla sua maniera, che non potrà mai piacere a' rigorosi geometri, la verità dalla quale quella immediatamente dipende, facendo eco al suo compatriota Brianchon, dica, che da essa può derivarsene, del pari che da quella del Newton, un elegante teorema, che enuncia (*Propriétes projectives des figures* §.398.). Ma questo teorema è esso per l'appunto quello del Newton da noi dimostrato.

# *Note*

## AL LIBRO QUINTO.

*Al cap.I. del lib.V.* — Veggonsi in questo capitolo raccolti i lemmi per la trattazione dell' argomento del presente libro, premettendovi le definizioni de' solidi generati dalle sezioni coniche. E per la *sferoide*, ritenendo per brevità una tal voce pel solido generato dal rivolgimento dell' ellisse intorno all' asse maggiore, si è aggiunto l'epiteto di *schiacciata*, o *depressa* all' altro solido, che ottiensi facendola rivolgere intorno all' asse minore, il qual solido, per brevità, si usa anche dirlo *ellissoide*. E qui convien ricordare, che Archimede disse *allungata* la prima, ed *allargata* la seconda *(longam, e latam)*. Il Viviani aggiunse eziandio all' ellisse l' epiteto di *allungata*, o *allargata* (*oblonga*, o *prolata*); ma noi, per que' pochi casi, in cui ci conveniva rapportarla all' asse minore, ci siamo meglio contentati di ciò dinotare. Riguardo poi alla così da noi detta *scala delle normali* (*def.4.*), avvertiremo, che il Viviani la disse (anche con molta proprietà) *limite delle ordinazioni delle normali*. Ma la nostra denominazione è più breve.

*Alle prop. I, II, e III. lib.V. (§§.559 e 561.)*— Corrispondono alle prop.35, 39, 40 lib. I. della *Divinat. in Aritaeum* del Viviani. Ma la nostra uniforme dimostrazione per le 2, 3, è assai più elegante di quello per le 39, e 40 del Viviani.

*Alle prop.IV, e V. lib V. (§§. 562, e 565.)*— Anche queste due proposizioni corrispondono alle 41, e 42 del Viviani. Ma lo esibizioni per le scale delle normali, che da noi si assegnano, sono uniformi; non così nell' opera *de locis solidis*. E la dimostrazione per esse è questa volta la stessa.

*Alle prop.VI e VII.lib.V.ed agli scolii rispettivi (§§. 564, a 567.)*— La prop.6 è il lemma 2 del lib.4 de' *Princip.Mathem.* del Newton, esteso anche a' solidi; ed essa e la seguente sono uno sviluppo del metodo de' limiti, di cui si fa uso nelle ricerche del presente libro. L'avvertimento fatto negli scolii a tali proposizioni era necessario, perchè la prima loro parte si rendesse generale, ed applicabile a' casi che verranno considerati in appresso.

*Alla prop.VIII. lib. V. (§. 569.)* — Questo bellissimo lemma è il fondamento della quadratura delle superficie di rivoluzione, data quella

della curva generatrice . Ma noi qui appresso da esso trarremo, per quelle de' solidi generati dalle sezioni coniche, più eleganti esibizioni.

*Alla prop. IX. lib. IV. , ed a' suoi cor. e scol.* (§§.572 a 577.). — Questa nuova verità, ed i corollari che se ne veggono dedotti, non solo hanno contribuito ad abbreviare le dimostrazioni di talune proposizioni in appresso; ma sono stati eziandio il mezzo della facile riduzione della quadratura de' segmenti ellittici, o iperbolici in generale, e de' solidi da essi generati.

Nello scolio 1. si è esteso il soggetto della proposizione a' quadrilinei corrispondenti nelle iperboli tra gli assintoti; e nel 2. si è poi indicato estendersi la part.I. di essa a qualunque diametro, e per qualsivogliano curve, quando i trilinei, che si comparano, vi abbiano le condizioni assegnate in tale scolio. E di ciò si può aver bisogno in più rincontri.

*Alla prop. X. lib. V.* (§. 578.) — Archimede fu il primo tra' geometri antichi, che imprese la quadratura della parabola, nella quale riescì egregiamente, componendo su tale argomento un intero libro, che intitolò: *Quadratura paraboles*. Ed egli vi tenne due modi, l'uno meccanico, pel quale fu obbligato a premettervi la determinazione del centro di gravità del triangolo, e però il primo de' due suoi libri *de planorum equilibriis*, l'altro geometrico fondato sul metodo di esaustione, ch'è quello da noi adoperatovi, rendendolo però più semplice, e piano, mediante il lemma stabilito nella prop.6; ed evitando per tal modo il lungo giro delle dimostrazioni indirette, alle quali erano costretti a ricorrere gli antichi, che dopo di essersi valuti di un tal metodo nella ricerca di qualche verità, alla quale senza di quello non potevano pervenire, industriavansi poi occultarlo nel dimostrarla (*V. nel vol.II. la nota al discorso preliminare al libro di Archimede*). Ed erano sì circospetti que' nostri saggi maestri, nel serbare uno stretto rigore nelle dimostrazioni geometriche, che Archimede stesso, dovendo assumere il principio, che *una grandezza minore presa un numero di volte potesse giugnere a superare una maggiore*, sen volle giustificare sopra i geometri che l'avevano preceduto in adottarlo, e specialmente Euclide. *Usi autem sunt* (così esprimevasi il grand'uomo nella lettera a Dositeo, con la quale accompagnava il libro *quadratura paraboles*) *eodem hoc lemmate etiam geometrae, qui ante nos floruerunt*. Che direbbero ora se vivessero, in vedere con quale ardimento non solamente si faccia uso, anche in ricerche elementari, apertamente di quantità infinitesime; ma a di più di principii *paradossali*, e neppur sempre sicuri. E sarebbero pur degni di qualche lode que' geometri attuali, che così procedono, se

alle loro ricerche non si potesse per le vie pure geometriche pervenire; il che rimane evidentemente contraddetto dal nostro operato in più proposizioni del precedente libro (*V. l'introduzione al cap.*III.*lib.IV*, e *la nota alla prop.32.*)

*Alla prop.XI.lib.V*, *ed allo scol.* (§§.582 e 586.)— Archimede trattò anche di questo rapporto nella prop. 6. del libro *de conoidibus*, *et sphaeroidibus*, premessavi la prop.5, in cui espone il rapporto dell'ellisse al cerchio circoscritto, e prevalendosi ancora del metodo di esaustione. Ma la nostra dimostrazione riesce assai elegante, per mezzo del lemma dimostrato nella prop.9. Nello scolio poi si è esibita la superficie della sferoide, o dell'ellissoide per un cerchio, elegante modo tenuto da Archimede pel cono, il cilindro, e la sfera. Ed invero riguardando gli antichi geometri alla facile rappresentazione del cerchio dal raggio, ebbero una tale esibizione in luogo della quadratura geometrica di ogni altra figura curvilinea, o superficia curva, che vi riducevano. E que' geometri moderni cui più piacque imitar gli antichi nell'eleganza di loro ricerche, tra' quali primeggia l'Ugenio, si sforzarono sempre in ciò ottenere.

*Alla prop. XII. lib.V.* (§.587.) — La presente proprietà dell'iperbole, fondamentale per la quadratura di essa, e per la derivazione de' logaritmi iperbolici non fu nota agli antichi. Essa fu rinvenuta dall'insigne geometra de' paesi bassi Gregorio *da S. Vincenzo*, nell'egregio lavoro, che fece sulla quadratura dell'iperbole, alla quale se egli non pervenne, offrì però molto prezioso materiale alle ricerche posteriori; sicchè ebbe il Leibnitz ad ascriverlo tra que' matematici, che più contribuirono a' progressi della moderna Geometria (*V. la nota 19. alla* Storia delle Sezioni coniche).

*Alla prop. XIII.lib.V. ed al cor.2.* (§§.592 e 594.). — La quadratura dell'iperbole sfuggì la penetrazione d'ingegno de' geometri antichi, che pure col loro metodo de' *limiti* vi avrebbero potuto di leggieri pervenire, se la precedente verità scopertavi dal *da S. Vincenzo* vi avessero nella natura di tal curva ravvisata. Ma nè tampoco se ne avvide costui, che aveva sott'occhi la proprietà da lui scoperta; sicchè bisognò attendere, che i metodi sommatorii cominciassero da' moderni a rendersi più attivi, ed affini al calcolo aritmetico, e che dalle utilissime considerazioni del Neper venisser fuori i logaritmi de' numeri, ed i loro diversi sistemi. Ed era ben ragionevole, che si compiesse l'argomento delle quadrature delle sezioni coniche, tanto benemerite della Geome-

tria, e della Natura. Di fatti i due geometri inglesi Brouncker, e Mercator valendosi opportunamente della novella *Aritmetica degl' infiniti* del Wallis, esibirono per serie la quadratura dell' iperbole; e l' Ugenio, e poi il Grandi vi si condussero mediante la *logistica*. Ma resi più comuni i novelli metodi sommatorii, i geometri a questi si rivolsero, da' quali con facilità poteva ottenersi il loro intento. Volendo però il Fergola trattarla elementarmente, come convenivasi al geometrico lavoro delle Sezioni coniche, ch' egli pubblicava la prima volta nel 1791, valsesi opportunamente delle serie assuntizie, alle quali innestando il teorema sopraddetto del *da S. Vincenzo*, pervenne a facilmente assegnarla per una serie ben convergente; e derivonne ancora la ricerca de' logaritmi iperbolici; il qual modo tennesi pure da altri dopo lui. Ma posteriormente avvertito dal giusto precetto dell' insigne analista Lagrange, che per non andar molto lontani dall' esattezza nelle ricerche così eseguite, convenga stimar l' errore risultante da' termini omessi (*Théorie des fonctions analytiques* §.53.), il cho impegnava nel caso presente in una indagine ben malagevole, si rivolse ad altro ripiego, mediante il quale usando il metodo de' limiti, pervenne con estrema facilità alla quadratura dell' iperbole, ed a' logaritmi che ne derivano (*V. ancora la memoria* sulla quadratura dell' iperbole *inserita nel vol. I. degli Atti* della R. A. delle scienze di Napoli). Ed era ben desiderabile da' geometri, che un tale argomento così venisse trattato, sicchè non dovesse ottenersi da' logaritmi iperbolici ciò che doveva produrli, come ordinariamente praticasi; o che d' altronde si sperimentasse qual valore potesse avere in tale ricerca la semplice Geometria, e l' Aritmetica volgare. Da che anche risultava, che non già per difetto di metodi non vi si fosse dagli antichi riescito, che pur dovettero sicuramente tentare questa ricerca; ma perchè era loro sfuggita quella proprietà dell' iperbole scopertavi, come si è di sopra detto, si feconda della sua quadratura.

Il cor. 2 di tal proposizione era importante per compimento della quadratura de' quadrilinei iperbolici di qualunque iperbole.

*A' cor. della prop. XIV. lib. V.* (§§. *597 a 599.*). — Nel primo di tali cor. è recata, per incidenza, una proprietà dell' iperbole parilatera; e nel secondo la quadratura di un quadrilineo iperbolico limitato tra 'l semiasse primario, e l' ordinata ad un assintoto, la quale riesciva ugualmente facile rilevarla dalla prop. 13. Finalmente il corol. 3. dà un avvertimento analogo a quello del cor. 2., prop. 12., di cui è stato già detto in fine della nota precedente.

*Allo scol. della prop.XIV. lib. V. ( §. 600. )* — In questo scolio si è esibita la quadratura assoluta della differenza di due segmenti iperbolici definiti, ciascun de' quali non è suscettivo di tal quadratura : di che già altri esempi si avevano fin da' primi tempi della Geometria. Di fatti Ippocrate Chio esibì quella delle così dette *lunule*. Pappo nella prop.30 del lib.IV. *Collectionum mathematicarum* dimostrò pure assolutamente quadrabile la superficie di un emisfero limitata, verso il cerchio base, da una spirale sferica convenevolmente descrittavi sopra. Il Viviani offrì anche varie superficie, che nella loro differenza da altre rimanevano quadrabili, mentre nè queste, nè quelle l erano, e l' ab. Grandi ne accrebbe il numero, nel suo trattatino *de fornicibus conicis*. Lo stesso fece per altre superficie Giov. Bernoulli, estendendo l' enigma geometrico proposto dal Viviani alle superficie conoidee, e sferoidee ; e rilevò pure, che: *elevando, sulla base di un cono retto, un solido prismatico a base qualunque rettilinea, o ancor curvilinea, questo incontrando la superficie del cono retto, ne ascinderà una porzione assolutamente quadrabile, se tal sia la base del prisma , cioè che starà alla base del prisma, come il lato del cono al raggio della sua base*. L' Ugenio fece anche osservare, che mentre la quadratura della superficie dell' ellissoide, e del conoide parabolico dipende dalla quadratura dell' iperbola, o però da' logaritmi iperbolici, si può sempre : *data una ellissoide assegnare un conoide iperbolico* (o dato questo assegnar quella) *sicchè la somma delle loro superficie pareggi un cerchio dato*. Di che ne considera un esempio in un caso lo più semplice.

*Alle prop. da XV, a XIX del lib. V, ed a' loro cor., e scol. (§§. 602. a 610. )* — Si avverta l'elegante forma nella quale veggonsi esibite le superficie de' solidi conoidali, e sferoidali conici, principalmente ove esse veggonsi ridotte a cerchi *( Vedi nota al §. 586. )*.

*Alla prop. XX. lib. V, ( §. 611. )*. — Su questo argomento, che per più tempo ha tenuti occupati i geometri di nostra scuola, e che or vedesi ridotto ad un semplicissimo corollario, potrà riscontrarsi il volume de' nostri *Opuscoli matematici* pubblicato nel 1810, ed il 1° di quelli degli *Atti della R. A. delle Scienze di Napoli*. E di esso, raccogliendo tutto questo materiale sparso, ed ordinandolo, verrà anche composto il vol. VI. degli *Opuscoli matematici*, che abbiamo promesso pubblicare.

*Allo scol. della prop. XXIII. lib. V. ( §. 616. )* — Questo scolio è un altro argomento dell' utilità grande della quale l' è nelle quadrature, e cubature la prop. IX. da noi stabilita.

*Alla prop.XXV.lib.V. ed allo scol.* (§§.*618, e 619*) — A compiere l' argomento della misura de' principali solidi generati dalle sezioni coniche conveniva recar quella del solido, che descrivesi dal rivolgimento dell' iperbole intorno all' asse secondario, detto da Bonaventura Cavalieri *timpano iperbolico*, e posteriormente *cilindroide*; del quale nessuno finora aveva pur fatta menzione nelle istituzioni su i Conici. È però, che nella prop. XIX. abbiamo in maniera facilissima, più che da altri non si era fatto, esibita la corrispondenza continua tra la superficie di questo solido, e quella di una determinata ellissoide. Restava dopo ciò ad esibirne la solidità. Or questa, sebbene trattata dal Cavalieri nella sua *Geometria degl' indivisibili*, nel cor. 21. prop. XXX. del lib. V, pure, o la durezza del metodo di cui egli si prevale, o le molte ricerche le quali debbono necessariamente precederla, e l'essere una tale opera, per altro importantissima, e di gran merito prima che i metodi sommatorii algebrici si conoscessero, ora poco letta, han fatto sì, che nè pur per ombra si fosse avvertito, che in essa del cilindroide si trattasse. Ond' è che il P.Fontana, nel dare col calcolo sublime l'espressione della solidità del cilindroide, non fa menzione, che solamente dell' esibizione del solido annulare generato da un segmento iperbolico con ordinata all' asse primario, rivolgendosi d' intorno all' asse secondario, recata dal Tacquet nel lib.V della sua opera *Cylindricorum, et Annularium*, aggiunto dopo otto anni a'primi quattro, che furono pubblicati nel 1651, e dalla quale esibizione quella del cilindroide poteva trarsi.

Ed è pur da notare, che il Tacquet, mentre consumò molti anni, e pose molto impegno in trattare ( come ben dice il Montucla) *con un' affettazione superflua, secondo lo stile dell' antica Geometria* un argomento, che col lavoro del Cavalieri aveva molto nesso, ed era in esso compreso, non avesse mai pensato al gran profitto che poteva trarre dal metodo degl' *indivisibili*; chè altrimenti egli non avrebbe potuto esclamare nella sua *Geometria Practica*, al proposito della determinazione del solido annulare soprindicato, *equidem fateor me hoc invento laetatum fuisse*, e molto meno si sarebbe iuconsideratamente indotto ad attaccare quel metodo come ageometrico.

Or tralasciando di qui dire tutto quello che riguarda la nostra esibizione della solidità del cilindroide, del che altrove abbiamo fatto parola, ci giova solamente far osservare, che questa supera grandemente in eleganza e quella del Cavalieri, e l' altra che dal Tacquet può trarsi; e ch' é la sola che crediamo propria a recarsi in un libro elementare *(Veg. le note alle Sezioni Coniche analitiche del Fergola, ed una nostra Memoria su questo stesso argomento, pubblicata nel volume IV. degli Atti della R. A. delle scienze di Napoli.)*.

*A' cap. II, III., IV. del lib. IV.* — Chiunque abbia considerato sulla misura delle curve coniche in generale, pe' loro spazi, perimetri, e superficie e solidi da essi generati, si sarà ben avveduto, che le medesime mentre costituiscono una ben limitata famiglia di curve geometriche dotata di proprietà affini, come si è più specialmente fatto rilevare nell' *Appendice* a' primi tre libri del presente trattato, offrano poi una dissociazione grandissima nella loro misura. Di fatti, a cominciar dal cerchio, la sua quadratura non si ha che per approssimazione, e per mezzo delle così dette dagli analisti *funzioni circolari*; n' è però ad essa connessa la rettificazione della circonferenza, e la quadratura della superficie sferica, non che la cubatura di un tal solido: mentre per l' ellisse, di cui il cerchio n' è un caso particolare, la quadratura ripetesi da quella del cerchio; ma la rettificazione non solo eccede le trascendenti circolari, ma ancora le logaritmiche, che dalla quadratura dell' iperbole risultano. E pe' solidi dall' ellisse generati, sebbene una medesima sia la regola di misura della sferoide, e dell' ellissoide, dipendente dalla quadratura del cerchio, la superficie però del primo di tali solidi dal cerchio dipenda, mentre per quella dell'altro richiedesi la quadratura dell' iperbole. Inoltre, che la quadratura dell' iperbole dia luogo ad un nuovo genere di funzioni trascendenti; ma del pari che per l' ellisse da queste affatto non possa ottenersi la rettificazione, la quale è però comunicante con quella dell' ellisse, cioè dipendente dallo stesso genere di funzioni più trascendenti che le circolari, e le logaritmiche, che agli analisti più recenti è piaciuto chiamare *trascendenti ellittiche*. Intanto la cubatura del conoide iperbolico n' è geometrica, e similmente quella del cilindroide, mentre la quadratura della superficie di questi solidi dipende da quella dell' iperbole. Finalmente, che per la parabola ne sia assoluta la quadratura di essa, e dipendente dal cerchio quella della superficie del conoide parabolico, o la cubatura di tal solido; ma la rettificazione ne sia trascendente, e dipenda dalla quadratura dell' iperbole.

E dopo tanta disparità avrà dovuto anche maravigliarsi, che per l'iperbole, non assolutamente quadrabile, possansi assegnare degli spazi di essa la cui differenza il sia: e che similmente per la parabola, non rettificabile assolutamente, vi sieno pur degli archi a differenze rettificabili; cioè, che *dato un arco parabolico possa sempre assegnarsene un altro, talchè la differenza loro sia rettificabile*; e similmente per due assegnati archi ellittici, o iperbolici.

# ADDIZIONI

I. Per maggior chiarezza dell' enunciazione della *prop.* 3. *parabola*, suppliscasi la seguente def.— » Se per lo contatto di una tangente late-» rale della parabola distendasi la parallela al diametro, la quale vi for-» mi un parallelogrammo nell' incontrarne la tangente verticale, ed una » qualunque semiordinata ad esso diametro; una tal figura si dirà *qua-» drilineo corrispondente* all' estremo della detta semiordinata «.

E nell' ellisso, ed iperbole la retta pel contatto dovrà passare pel centro, cioè essere il diametro che vi corrisponde; il che servirà a dilucidare le enunciazioni delle *prop.* 4. *ellis.*, e 5. *iperb.*

II. Al §.108. si potrà soggiugnere — » E però dovrà stare FP, o sia FR : FN :: FN : NA [ *fig.* 29.], cioè : *la perpendicolare tirata dal fuo-» co della parabola su di una tangente è media proporzionale tra il ramo » che va al contatto, e la quarta parte del parametro principale*. Che » è il lemmà 14. lib. I. do *Princip. Math.*

III. Lo scol. 2. §. 136 si compia come segue : — » Per la definizio-» ne della *sottangente*, della *normale*, e della *sunnormale* dell' ellisse, » ritengansi quelle, che furono recate per la parabola, ne' §§.58, 59. » Avvertendo però, che la normale in quella curva può riferirsi a cia-» scun degli assi, e quindi prendersi la sunnormale sull' uno, o sull' al-» tro. Ed in modo analogo risulta modificato lo scol. 2. §.219.

IV. Il §. 173 si continui con aggiugnervi : » e supplirvi ciò, che dal §. 85 al 90 si è ivi anche detto «.

V. *Dopo il* §.214 *si potrà aggiugnere quest' altro* §.» Scol. Volendo ti-» rare una tangente parallela ad una corda dell' iperbole, o pur che » inclinisi all' asse primario in un dato angolo, si adopri la stessa co-» struzione recata per l' ellisse nel §. 130,

VI. In fine del §. 293 suppliscasi lo stesso avvertimento, che in fine del §. 172. lib. II.

VII. Al §.402. *v.5*, *dopo segante*, *aggiungasi* : » ch' è un nuovo porisma conico. »

| | | ERRORI | CORREZIONI |
|---|---|---|---|
| *Pag.* XIV *v.* | 9 | *feroidi* | *sferoidi* |
| XXI | 21 | Malvio | Milnio |
| XXXII | 33 | da | su |
| XXXIX | 27 | prop.21, | prop.26. |
| LXV | 22 | per tutte le curve coniche | della parabola |
| LXVI | | *Dopo* Nota. *si aggiunga*— | e si riscontri ancora l' altra a' §§.195 e 315. |
| 11 | 2 | AP | AT |
| 48 | 2 | dalla | dalla curva, e dalla. |
| 49 | 19 | GS | CS |
| | 29 | PDPA. | PTBA |
| 52 | 8 ed 11 | CD | GD |
| | 22 | [*fig.6.*] | [*fig. 5.*] |
| 53 | 24 | La def.III devè esser II, e così continuare in appresso per le altre del lib. II. | |
| 55 | 4 | tangente | tangenti |
| | 9 | *tri* | *tiri* |
| 56 | 15 | dal | del |
| 60 | 3 e 6 | *Il* b *corrispondente alla figura deve essere* B | |
| 70 | 12 | §. 83. | §. 84. |
| 101 | | *per errore segnato 201, al verso 6 la parola* angolo *è superflua* | |
| 106 | 12 | supplementale | supplimentale |
| | 16 | supplementi | supplimenti |
| | 19 | iscritto in | descritto tra |
| 109 | 15 e 16 | ai centri | al centro |
| 117 | 24 e 25 | de'detti semidiametri conjugati | co' semidiametri conjugati CA, CB. |
| 119 | 17 | §§ 181 e 182 | §§. 179 e 181 |
| 156 | 14 | PR×RN | PR×PN. |
| 163 | 23 | due | a due |
| 164 | 27 | RF | EF |
| 172 | 13 | (359) | (357) |
| 191 | 26 | sezione | sezione conica. |
| 192 | | *Gli scolii di questo* §, *e degli altri 451, e 454 sono 1, 2, 3.* | |
| 195 | 24 | LC . . . . *Per maggior chiarezza si tenga presente la nota a pag. 192, ove dichiarasi il punto* L | |
| 200 | 17 | EG — *soggiungasi* tangente in G | |
| 206 | 22 | AV | UV |
| 219 | 21 | KSU | KSV |
| 221 | *ult.* | [*fig.64*] | [*fig.63*] e così continuando per le rimanenti cit. di fig. |
| 228 | 22 | Hi | Ii |

## NELLE NOTE.

| Pag. | Lin. | ERRORI | CORREZIONI |
|---|---|---|---|
| *Pag.* VIII | *ult.* | i seguenti altri teoremi — | il seguente altro teorema |
| XVI | 23 | §, 00 | §. 105 |
| XVII | 4 | *(§§. 123. e 126.), ed alla prop. V.* | *ed alla prop. V. (§§. 125, e 126)* |
| XVIII | 10 | §§.116 | §§.155 |
| XXI | 33 | *curva a centro* | *curva conica a centro* |
| XXIII | 31 | §. 232 | §.252 |
| XXIV | 10 | 278 | 254 |
| XXXVII | 33 | *ed allo scolio (§.503.)* | *ed agli scolii (§.503 e 504)* |
| XL | 9 | *a* 531, 539, o 540 | *a* 535, 539 o 540 |